משוואות דיפרנציאליות רגילות 1

פתרון תרגיל 9

נוסחה לבלוק ג'ורדן: $\dot{y} = Ay, \quad E = (e_1 ... e_n)$,

$$AE = E\Lambda, y = e^{At}y(0) = Ee^{\Lambda t}E^{-1}y(0) = Ee^{\Lambda t}C$$

כאשר $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ ... \\ c_n \end{pmatrix}$ הם קבועים שרירותיים. את הנוסחה ל $e^{\Lambda t}$ כבר למדנו. כך מקבלים נוסחאות לכל n.

תשובה 1

מצא את הפתרון הכללי של המערכות הבאות מעל $\boldsymbol{R}$

א. $\dot{y} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\vec{x}$, $p(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 9,\ \lambda_{1,2} = 3$.

$(A-3I)e_1 = 0,\ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $(A-I)e_2 = e_1,\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$$y = c_1e^{3t}e_1 + c_2e^{3t}(te_1 + e_2) = c_1e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2e^{3t}\left(t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

$\dot{y} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}y$, $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1,\ \lambda_{1,2} = 1$

$(A-I)e_1 = 0,\ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $(A-I)e_2 = e_1,\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$$y = c_1e^{t}e_1 + c_2e^{t}(te_1 + e_2) = c_1e^{t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2e^{t}\left(t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

ב. $\dot{y} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}y$, ידוע שערך עצמי אחד הוא 2-.

ג. $\begin{vmatrix} -3-\lambda & 0 & 2 \\ 1 & -1-\lambda & 0 \\ -2 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+2)(\lambda^2 + 2\lambda + 3) = 0 \Leftarrow$

$\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = -1+\sqrt{2}i,\ \lambda_3 = -1-\sqrt{2}i$. נציב ונחשב את הוקטורים העצמיים:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}i \\ 1 \\ -1+\sqrt{2}i \end{pmatrix},\ e_3 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}i \\ 1 \\ -1-\sqrt{2}i \end{pmatrix} \Leftarrow$$

$y(t) = d_1\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-2t} + d_2\begin{pmatrix} \sqrt{2}i \\ 1 \\ -1+\sqrt{2}i \end{pmatrix}e^{(-1+\sqrt{2}i)t} + d_3\begin{pmatrix} -\sqrt{2}i \\ 1 \\ -1-\sqrt{2}i \end{pmatrix}e^{(-1-\sqrt{2}i)t}$ - פתרון מרוכב $\Leftarrow$

לוקחים חלק ממשי וחלק מדומה של אחד משני פתרונות יסודיים צמודים אחד לשיני כפתרונות יסודיים חדשים ונקבל:

$$y(t)=c_1\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}e^{-2t}+c_2\begin{pmatrix}-\sqrt{2}\sin\sqrt{2}t\\ \cos\sqrt{2}t\\ -\cos\sqrt{2}t-\sqrt{2}\sin\sqrt{2}t\end{pmatrix}e^{-t}+c_3\begin{pmatrix}\sqrt{2}\cos\sqrt{2}t\\ \sin\sqrt{2}t\\ \sqrt{2}\cos\sqrt{2}t-\sin\sqrt{2}t\end{pmatrix}e^{-t}$$

כאשר c_1,c_2,c_3 מרוכבים מקבלים פתרון כללי מעל **C**, כאשר c_1,c_2,c_3 מרוכבים מקבלים פתרון כללי מעל **R**.

ד. $\dot{y}=\begin{pmatrix}4&9&9\\-6&-11&-6\\3&3&-2\end{pmatrix}y$, ידוע שערך עצמי אחד הוא 1.

$\begin{vmatrix}\lambda-4&-9&-9\\6&\lambda+11&6\\-3&-3&\lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda+5)^2(\lambda-1)=0 \Rightarrow \lambda_{1,2}=-5,\lambda_3=1$. למזלנו ישנם שני ו״ע

לע״ע $\lambda=-5$, ונקבל פתרון כללי: $\vec{x}(t)=c_1\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}e^{-5t}+c_2\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}e^{-5t}+c_3\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}e^{t}$.

ה. $\dot{y}=\begin{pmatrix}3&1&0&0\\2&4&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}y$. המערכת מתפרקת לשתי נפרדות.

$$\dot{z}=\begin{pmatrix}3&1\\2&4\end{pmatrix}z,\ p(\lambda)=\lambda^2-7\lambda+10,\ \lambda_{1,2}=2{,}5$$

$$e_1=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\ (A-2I)e_1=0,\ e_2=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\ (A-5I)e_2=0.$$

$$\dot{z}=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}z,\ p(\lambda)=\lambda^2-2\lambda+1,\ \lambda_{1,2}=1$$

$$e_1=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\ (A-I)e_1=0,\ e_2=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ (A-I)e_2=e_1.$$

$$y=c_1e^{2t}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}+c_2e^{5t}\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix}+c_3e^{t}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}+c_4e^{t}\left(t\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$$

ו. $\dot{y} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} y$ דומה

$p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 8,\ \lambda_{1,2} = 2 \pm 2i\ ,\dot{z} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} z$

$,(A-(2-2i)I)e_1 = 0,\ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1+2i \end{pmatrix}$

$z_1 = e^{2t}\begin{pmatrix} \cos 2t \\ -\cos 2t + 2\sin 2t \end{pmatrix},\ z_2 = e^{2t}\begin{pmatrix} -\sin 2t \\ 2\cos 2t + \sin 2t \end{pmatrix}$ - פתרונות יסודיים ממשיים.

$$y = c_1 e^{-2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^{2t}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos 2t \\ -\cos 2t + 2\sin t \end{pmatrix} + c_4 e^{2t}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sin 2t \\ 2\cos 2t + \sin t \end{pmatrix}$$

תשובה 2

בדוק איזה פונקציות הן קוואזי-פולינומים (ממשיים או מרוכבים) ומיין את הקוואזי-פולינומים לפי ערך עצמי וחזקה:

א. 2 - קוואזי-פולינום, חזקה 0, $\lambda = 0$
ב. $\cos t$ - קוואזי-פולינום, חזקה 0, $\lambda = i$
ג. $\sin t \cos t + e^t$ - לא קוואזי-פולינום, אבל אפשר להציג כסכום של קוואזי-פולינומים
ד. $e^{5t}\cos t - te^{5t}\sin t$ - קוואזי-פולינום, חזקה 1, $\lambda = 5 + i$
ה. $t^{-2}e^{-t}$ - לא קוואזי-פולינום
ו. $e^{it}(\cos t - t\sin t)$ - לא קוואזי-פולינום
ז. $e^{(1-i)t}t^3$ - קוואזי-פולינום מרוכב, חזקה 3, $\lambda = 1 - i$
ח. $e^t \tan t$ - לא קוואזי-פולינום
ט. $t^7 + 5t$ - קוואזי-פולינום, חזקה 7, $\lambda = 0$
י. $\sin^2 t - \sin t$ - לא קוואזי-פולינום, אבל אפשר להציג כסכום של קוואזי-פולינומים