תרגיל מספר 8
פתרונות

תשובה 1.

א) $A=\begin{pmatrix}-2&0&0&0\\0&3&1&0\\0&0&3&1\\0&0&0&3\end{pmatrix},\ e^{At}=\begin{pmatrix}e^{-2t}&0&0&0\\0&e^{3t}&te^{3t}&\frac{1}{2}t^2e^{3t}\\0&0&e^{3t}&te^{3t}\\0&0&0&e^{3t}\end{pmatrix}$

ב) $A=J=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$, $e^{Jt}=I+\frac{1}{1!}tJ+\frac{1}{2!}t^2J^2+\frac{1}{3!}t^3J^3+...$, $J^2=-I=-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$,

$$e^{Jt}=I+\frac{1}{1!}tJ-\frac{1}{2!}t^2I-\frac{1}{3!}t^3J+...=I(1-\frac{1}{2!}t^2+\frac{1}{4!}t^4-...)+J(\frac{1}{1!}t-\frac{1}{3!}t^3+...)=I\cos t+J\sin t$$

$$e^{Jt}=\begin{pmatrix}\cos t&\sin t\\-\sin t&\cos t\end{pmatrix}$$

ג) $A=\begin{pmatrix}2&-7\\7&2\end{pmatrix}$, $A=2I-7J$, $IJ=JI$ לכן

$$e^{At}=e^{2It-7Jt}=e^{2It}e^{-7Jt}=e^{2t}Ie^{J(-7t)}=e^{2t}\begin{pmatrix}\cos 7t&-\sin 7t\\\sin 7t&\cos 7t\end{pmatrix}$$

ד) $A=\begin{pmatrix}-2&1&0&0\\0&-2&0&0\\0&0&3&-3\\0&0&3&3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}3&-3\\3&3\end{pmatrix}=3I-3J$, $e^{At}=\begin{pmatrix}e^{-2t}&te^{-2t}&0&0\\0&e^{-2t}&0&0\\0&0&e^{3t}\cos 3t&-e^{3t}\sin 3t\\0&0&e^{3t}\sin 3t&e^{3t}\cos 3t\end{pmatrix}$

ה) $A=\begin{pmatrix}-3&5\\-5&7\end{pmatrix}$, $p(\lambda)=\lambda^2-4\lambda+4=(\lambda-2)^2$,

וקטור עצמי $e_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $(A-2I)e_1=0$, וקטור עצמי מוכלל $e_2=\begin{pmatrix}-0.2\\0\end{pmatrix}$, $(A-2I)e_2=e_1$.

$\Lambda=\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix}1&-1/5\\1&0\end{pmatrix}$, $AE=E\Lambda$ לכן $e^{At}=Ee^{\Lambda t}E^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1/5\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{2t}&te^{2t}\\0&e^{2t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\-5&5\end{pmatrix}$.

תשובה 2.

למצוא פתרון כללי מעל **R** ומעל **C**, וגם הפתרון לבעיית קושי.

א) $\begin{cases}\dot y_1 = 5y_1 - y_2\\ \dot y_2 = 3y_1 + y_2\end{cases}$, $\begin{matrix}y_1(0)=2\\ y_2(0)=-1\end{matrix}$. $p(\lambda)=\det(A-\lambda I)=\lambda^2-6\lambda+8=(\lambda-4)(\lambda-2)$

וקטורים עצמיים: $e_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, (A-4I)e_1=0$, $e_2=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}, (A-2I)e_2=0$.

פתרון כללי: $y=c_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{4t}+c_2\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}e^{2t}$, כאשר מעל **C** הקבועים $c_1,c_2\in\mathbf{C}$, ומעל **R** הקבועים $c_1,c_2\in\mathbf{R}$.

מתנאי התחלה מוצאים $\begin{cases}c_1+c_2=2\\ c_1+3c_2=-1\end{cases}$, $c_1=3.5, c_2=-1.5$. אותו הפתרון מעל **C** ומעל **R**.

ב) $\begin{cases}\dot y_1 = 2y_1 - y_2\\ \dot y_2 = 3y_1 - 2y_2\end{cases}$, $\begin{matrix}y_1(0)=1\\ y_2(0)=1\end{matrix}$. $p(\lambda)=\det(A-\lambda I)=\lambda^2-1=(\lambda-1)(\lambda+1)$

וקטורים עצמיים: $e_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, (A-I)e_1=0$, $e_2=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}, (A+I)e_2=0$.

פתרון כללי: $y=c_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{t}+c_2\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}e^{-t}$, כאשר מעל **C** הקבועים $c_1,c_2\in\mathbf{C}$, ומעל **R** הקבועים $c_1,c_2\in\mathbf{R}$.

מתנאי התחלה מוצאים $\begin{cases}c_1+c_2=1\\ c_1+3c_2=1\end{cases}$, $c_1=1, c_2=0$. אותו הפתרון מעל **C** ומעל **R**.

ג) $\begin{cases}\dot y_1 = y_1 - y_2\\ \dot y_2 = 5y_1 - 3y_2\end{cases}$, $\begin{matrix}y_1(0)=0\\ y_2(0)=1\end{matrix}$. $p(\lambda)=\det(A-\lambda I)=\lambda^2+2\lambda+2, \lambda_{1,2}=1\pm i$

וקטורים עצמיים: $e_1=\begin{pmatrix}1\\2+i\end{pmatrix}, (A-(-1-i)I)e_1=0$, $e_2=\bar e_1=\begin{pmatrix}1\\2-i\end{pmatrix}$.

פתרון כללי מעל **C**: $y=c_1\begin{pmatrix}1\\2-i\end{pmatrix}e^{(-1-i)t}+c_2\begin{pmatrix}1\\2-i\end{pmatrix}e^{(-1+i)t}$, $c_1,c_2\in\mathbf{C}$.

הפתרונות היסודיים המרוכבים הם $\varphi_1=\begin{pmatrix}1\\2-i\end{pmatrix}e^{(-1-i)t}, \varphi_2=\bar\varphi_1=\begin{pmatrix}1\\2-i\end{pmatrix}e^{(-1+i)t}$.

$$\varphi_1=\begin{pmatrix}1\\2-i\end{pmatrix}e^{-t}(\cos t-i\sin t)=e^{-t}\begin{pmatrix}\cos t-i\sin t\\ 2\cos t-\sin t-i(\cos t+2\sin t)\end{pmatrix}$$

הפתרונות היסודיים הממשיים הם $\psi_1=\operatorname{Re}\varphi_1=e^{-t}\begin{pmatrix}\cos t\\ 2\cos t-\sin t\end{pmatrix}, \psi_2=-\operatorname{Im}\varphi_1=e^{-t}\begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t+2\sin t\end{pmatrix}$.

פתרון כללי: $y=c_1e^{-t}\begin{pmatrix}\cos t\\ 2\cos t-\sin t\end{pmatrix}+c_2e^{-t}\begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t+2\sin t\end{pmatrix}$, כאשר מעל **C** הקבועים $c_1,c_2\in\mathbf{C}$, ומעל **R** הקבועים $c_1,c_2\in\mathbf{R}$.

מתנאי התחלה מוצאים $\begin{cases}c_1=0\\ 2c_1+c_2=1\end{cases}$, $c_1=0, c_2=1$. אותו הפתרון מעל **C** ומעל **R**.

תשובה 3.

המערכת היא $\begin{cases} \dot{x} = \alpha y \\ \dot{y} = \beta x \end{cases}$, $x(0) = x_0, y(0) = y_0$. $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 - \alpha\beta$.

וקטורים עצמיים: $e_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\sqrt{\alpha\beta} \end{pmatrix}, (A + \sqrt{\alpha\beta}I)e_1 = 0$, $e_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \sqrt{\alpha\beta} \end{pmatrix}, (A - \sqrt{\alpha\beta}I)e_1 = 0$.

פתרון כללי: $y = c_1 e^{\sqrt{\alpha\beta}t}\begin{pmatrix} \alpha \\ \sqrt{\alpha\beta} \end{pmatrix} + c_2 e^{-\sqrt{\alpha\beta}t}\begin{pmatrix} \alpha \\ -\sqrt{\alpha\beta} \end{pmatrix}$. זה פתרון מעל **C**, הקבועים $c_1, c_2 \in \mathbf{C}$, וזה פתרון מעל **R** כאשר $\alpha\beta > 0$. הפתרון לבעיית קושי

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{x_0}{\sqrt{\alpha}} + \frac{y_0}{\sqrt{\beta}}\right)\begin{pmatrix} \sqrt{\alpha} \\ \sqrt{\beta} \end{pmatrix} e^{\sqrt{\alpha\beta}t} + \frac{1}{2}\left(\frac{x_0}{\sqrt{\alpha}} - \frac{y_0}{\sqrt{\beta}}\right)\begin{pmatrix} \sqrt{\alpha} \\ -\sqrt{\beta} \end{pmatrix} e^{-\sqrt{\alpha\beta}t}$$

1. $x_0 > 0, y_0 > 0, \alpha > 0, \beta > 0$: קל לראות ש $c_1 > 0$. x, y מונוטונית שאופים לאין-סוף. אידיליה, משעמם.
2. $x_0 > 0, y_0 < 0, \alpha > 0, \beta > 0$: תלוי בסימן $\operatorname{sgn}\left(\frac{x_0}{\sqrt{\alpha}} + \frac{y_0}{\sqrt{\beta}}\right)$. אם $\frac{x_0}{\sqrt{\alpha}} + \frac{y_0}{\sqrt{\beta}} > 0$ אז $x, y \to \infty$, אם $\frac{x_0}{\sqrt{\alpha}} + \frac{y_0}{\sqrt{\beta}} < 0$ אז $x, y \to -\infty$, השנאה הדדית. אם $\frac{x_0}{\sqrt{\alpha}} + \frac{y_0}{\sqrt{\beta}} = 0$ אז $x, y \to 0$.
3. $x_0 > 0, y_0 > 0, \alpha > 0, \beta < 0$: המטריצה שקולה ל-$J$. לכן הפתרון יהיה בצורה $A\sin\sqrt{|\alpha\beta|}t + B\cos\sqrt{|\alpha\beta|}t$ והוא יסתובב סביב 0 בקו סגור. זאת אומרת שהאהבה מתחלפת כל הזמן בשנאה וההפך.