משוואות דיפרנציאליות רגילות

פתרון תרגיל 4

תשובה 1

.I $z=xy \Rightarrow z'=y+xy' \Rightarrow \left(\frac{z}{x}\right)^2+\left(z+\tan(z)\right)\left(\frac{z'-\frac{z}{x}}{x}\right)=0 \Rightarrow$ נכפיל ב x^2 ונ׳

$$z^2+\left(z+\tan(z)\right)\left(xz'-z\right)=0 \Rightarrow xz'=\frac{z\tan z}{z+\tan z} \Rightarrow \frac{z+\tan z}{z\tan z}dz=\frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$\ln(\sin z)+\ln(z)=\ln(x)+c \Rightarrow z\sin z=Cx$ (יש להוסיף כמובן את הפתרון

$y=0$ ו- $x=0$.

.II נכתוב את המשוואה: $y(ydx+xdy)+\tan(xy)dy=0 \Rightarrow yd(xy)+\tan(xy)dy=0$

$$\frac{dy}{y}=-\frac{d(xy)}{\tan(xy)} \Rightarrow \ln(y)=-\ln(\sin(xy))+c \Rightarrow y\sin(xy)=C.$$

תשובה 2

א)

$y_1'=-1=\frac{-x+\sqrt{(x-2)^2}}{2}$. y_1 קיים לכל $x\geq 2$.

$y'_2=-\frac{x}{2}=\frac{-x+\sqrt{x^2-x^2}}{2}$. y_2 קיים לכל x.

ב)

שני הפתרונות y_1 ו y_2 מביאים לאי-יחידות בנקודה (x_0,y_0) שבה $1-x_0=-\frac{x_0{}^2}{4}$, ז״א $x_0=2, y_0=-1$. אבל בסביבה נקי׳ זו f_y לא רציפה. ($f(x,y)=\frac{-x+\sqrt{x^2+4y}}{2}$ ולכן $f_y|_{(2,-1)}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{x^2+4y}}|_{(2,-1)}=\infty$).

תשובה 3

א) $y_0=0;\ y_1=0+\int_0^x xdx=x^2/2;\ ,\ y_2=0+\int_0^x(x-x^4/4)dx=x^2/2-x^5/20;\ ,$

$y_3=x^2/2+x^8/160-x^{11}/4400-x^5/20$.

ב)

תזכורת

$$\dot{y}=f(t,y),\quad y(t_0)=\xi$$

פה המשוואה מוגדרת ב $\Omega=\{|t-t_0|\le\varepsilon, |y-\xi|\le\delta\}$, $M\ge\sup\|f(t,y)\|$, L – קבוע ליפשיץ לפי y.

הפתרון מוגדר ב $[t_0-\varepsilon_1, t_0+\varepsilon_1]$ כאשר $0<\varepsilon_1\le\varepsilon, \delta/M, \varepsilon_1<1/L$.

נסמן: $\|h\|=\max\limits_{[t_0-\varepsilon_1,t_0+\varepsilon_1]}|h(t)|$ $\lambda=L\varepsilon_1<1,$

ניקח $y_0(t)$ כלשהיא כך ש $\|y_0-\xi\|\le\delta$

$$y_{n+1}(t)=\xi+\int_{t_0}^{t}f(s,y_n(s))ds=(Ay_n)(t)$$

העתקה מכווצת: $\|y_{n+1}-y_n\|\le\lambda\|y_n-y_{n-1}\|\quad\forall n$

$$y-y_0=y_1-y_0+y_2-y_1+y_3-y_2+\dots$$

לכן

$$\|y-y_0\|\le\|y_1-y_0\|+\|y_2-y_1\|+\|y_3-y_2\|+\dots,$$

$$\|y-y_0\|\le\|y_1-y_0\|(1+\lambda+\lambda^2+\dots)=\|Ay_0-y_0\|/(1-\lambda),$$

הנוסחה האחרונה נכונה לכל y_0. עכשיו $t\sim x$,

$x_0=0, x_1=0.5, \Omega=\{|x|\le0.5, |y|\le0.5\}, M\ge\max|x-y^2|, M=0.75, L\ge\max|(x-y^2)'_y|, L=1$.

ניקח פה $\varepsilon_1=0.5, \lambda=L\varepsilon_1=0.5$

נקבל

$$\|y-y_3\|\le\|y_4-y_3\|/(1-\lambda)\le\lambda\|y_3-y_2\|/(1-\lambda)=(1/2)2\|y_3-y_2\|=\|y_3-y_2\|$$

$$\|y-y_3\|\le\|x^8/160-x^{11}/4400\|\le(1+0.125/4400)(1/2)^8/160\le$$
$$1.0001(160\cdot256)^{-1}<1.0001(160\cdot250)^{-1}=1.0001/40000<0.000026$$

תשובה 4

א.

$$y_1(x)=1+\int_0^x(1+s)^2ds=1+x, y_0=1\quad,\quad y_2(x)=1+x+\frac{x^3}{3}+x^2$$

$$:1+\int_0^x(1+s+s^2+s^3/3)^2ds=1+x+x^2+x^3+\frac{2x^4}{3}+\frac{x^5}{3}+\frac{x^6}{9}+\frac{x^{10}}{90}\ge1+x+x^2+x^3(x\ge0).$$

ב) אפשר להראות באינדוקציה כי אם $y_4(x)\ge1+x+x^2+\dots+x^k(x>0)$, אזי

$$>0), y_{k+1}(x)=1+\int_0^x{y_k}^2(s)ds\ge1+x+x^2+\dots+x^{k+1}\Leftarrow{y_k}^2(x)\ge1+2x+3x^2+\dots+(k+1)x^k$$

ז"א סדרה $\{y_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ חסומה מלרע ע"י הסדרה $\{1+x+x^2+\dots+x^k\}_{k=1}^{\infty}$, שמתבדרת עבור $x\ge1$.

תשובה 5.

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - |x-y|^{1/2} \\ \dot{y} = \ln t + t^{1/3} x^{1/5} \end{cases} \qquad t_0 > 0, x(t_0) \neq y(t_0), x(t_0) \neq 0$$

$$(y-1)y'' - |y'+x| \tan x = 0 \qquad x(t_0) \neq \tfrac{\pi}{2} + k\pi, y(t_0) \neq 1$$

$$xy'' - |y'+x|^{1/2} = 0 \qquad x(t_0) \neq 0, y'(t_0) \neq -x(t_0)$$