משוואות דיפרנציאליות רגילות

פתרון תרגיל 3

תשובה 1

א. נחלק את המשוואה ב x ונקבל: $y'-\frac{y}{x}=\left(1+\frac{y}{x}\right)\ln\left(1+\frac{y}{x}\right)$, נציב $z=\frac{y}{x}$ $\Leftarrow$ $y'=xz'+z$ והמשוואה המתקבלת $xz'=(1+z)\ln(1+z)$ $\Leftarrow$ $\frac{dz}{(1+z)\ln(1+z)}=\frac{dx}{x}$ $\Leftarrow$ $\ln(\ln(1+z))=c+\ln(x)$ $\Leftarrow$ $z=e^{cx}-1$ $\Leftarrow$ $y=x\left(e^{cx}-1\right)$.

ב. נחלק את המשוואה ב x^3 ונקבל: $y'=\frac{2\left(\frac{y}{x}\right)^3-\frac{y}{x}}{2\frac{y}{x}-1}$, נציב $z=\frac{y}{x}$ $\Leftarrow$ $y'=xz'+z$ ונקבל $xz'+z=\frac{2z^3-z}{2z-1}$ $\Leftarrow$ $xz'=\frac{2z^3-2z^2}{2z-1}$ $\Leftarrow$ $\frac{2z-1}{2z^3-2z^2}dz=\frac{dx}{x}$ $\Leftarrow$ $\frac{1}{2}\int_c^z\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}\right)dt=\ln(x)$ $\Leftarrow$ $\frac{-1}{z}+\ln\left(\frac{z-1}{z}\right)+c=2\ln(x)$ $\Leftarrow$ $e^{\frac{x}{y}}=k\frac{y-x}{x^2y}$.

תשובה 2

א. $y=z^m$ $\Leftarrow$ $y'=mz^{m-1}z'$ $\Leftarrow$ נציב במשוואה ונקבל: $x^\alpha mz^{2m-1}\cdot z'+z^{m\alpha}=x^\beta$.
המשוואה תהא הומוגנית אם כל החזקות שוות $\Leftarrow$ $\alpha+2m-1=m\alpha=\beta$, נפתור עבור m: $m=\frac{\alpha-1}{\alpha-2}$, ועבור β נקבל $\beta=\frac{\alpha(\alpha-1)}{\alpha-2}$.

ב. מההצבות שקיבלנו בחלק א׳ נקבל: $x^\alpha\frac{\alpha-1}{\alpha-2}z^{\frac{\alpha}{\alpha-2}}\cdot z'+z^{\frac{\alpha(\alpha-1)}{\alpha-2}}=x^{\frac{\alpha(\alpha-1)}{\alpha-2}}$. נחלק ב $x^{\frac{\alpha(\alpha-1)}{\alpha-2}}$ ונקבל: $\left(\frac{z}{x}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-2}}\frac{\alpha-1}{\alpha-2}\cdot z'+\left(\frac{z}{x}\right)^{\frac{\alpha(\alpha-1)}{\alpha-2}}=1$. כעת נציב $u=\frac{z}{x}$ $\Leftarrow$ $z'=xu'+u$ $\Leftarrow$ $u^{\frac{\alpha}{\alpha-2}}\cdot\frac{\alpha-1}{\alpha-2}(xu'+u)+u^{\frac{\alpha(\alpha-1)}{\alpha-2}}=1$ $\Leftarrow$ (ע״י הפרדת משתנים) $\frac{dx}{x}=\frac{(\alpha-1)u^{\frac{\alpha}{\alpha-2}}du}{(\alpha-2)-(\alpha-2)u^{\frac{\alpha(\alpha-1)}{\alpha-2}}-(\alpha-1)u^{\frac{2\alpha-2}{\alpha-2}}}$, ונקבל: $x=e^{\int^u\frac{(\alpha-1)t^{\frac{\alpha}{\alpha-2}}dt}{(\alpha-2)-(\alpha-2)t^{\frac{\alpha(\alpha-1)}{\alpha-2}}-(\alpha-1)t^{\frac{2\alpha-2}{\alpha-2}}}dt}$
(וכמובן לא נוכל להמשיך מכאן).

תשובה 3

א. נחלק מונה ומכנה ב x ונקבל: $\frac{dy}{dx}=\frac{6+\frac{y}{x}}{6-\frac{y}{x}}$ נציב $z=\frac{y}{x} \Leftarrow y'=xz'+z$ והמשוואה

המתקבלת: $xz'+z=\frac{6+z}{6-z} \Leftarrow xz'=\frac{6-5z+z^2}{6-z} \Leftarrow \frac{(6-z)}{6-5z+z^2}dz=\frac{dx}{x} \Leftarrow$

מפתרון האינטגרלים נקבל: $(y-3x)^3=c(y-2x)^4$.

ב. $\frac{6(x+1)+(y-2)}{6(x+1)-(y-2)}=\frac{6x+y+4}{6x-y+8}$ וכן $\frac{dy}{dx}=\frac{d(y-2)}{d(x+1)}$, נשתמש בחלק א' ונקבל:

$(y-2-3(x+1))^3=c(y-2-2(x+1))^4 \Leftarrow (y-3x-5)^3=c(y-2x-4)^4$.

תשובה 4

א. $(2xy^4+\sin(y))dx+(4x^2y^3+x\cos(y))dy=0 \Leftarrow$

$M=2xy^4+\sin(y),\ N=4x^2y^3+x\cos(y)$.

$M_y=8xy^3+\cos(y),\ N_x=8xy^3+\cos(y) \Leftarrow$ המשוואה מדוייקת.

$\phi(x,y)=x^2y^4+x\sin(y)+f(y)$, ונקבל $f(y)=c$. ומכאן הפתרון:

$x^2y^4+x\sin(y)=c$.

ב. $(1-2xy-x^3)dy-(1+y^2+3x^2y)dx=0 \Leftarrow M=-1-y^2-3x^2y,\ N=1-2xy-x^3$

$M_y=-2y-3x^2,\ N_x=-2y-3x^2$ המשוואה מדוייקת.

$\phi(x,y)=-x-xy^2-x^3y+f(y)$, ונקבל $f(y)=y+c$. ומכאן הפתרון:

$-x-xy^2-x^3y+y=c$.

תשובה 5

$$(2x^3y^2-y)dx+(2x^2y^3-x)dy=0$$

כינוס איברים: $x^2y^2d(x^2+y^2)-d(xy)=0$

$$\Leftarrow d(x^2+y^2)-d(\frac{1}{xy})=0(x\neq 0,y\neq 0)$$

$x^2+y^2-\frac{1}{xy}=C$, ו $x=0$, $y=0$ פתרונות.