שוואות דיפרנציאמליות רגילות

פתרונות לתרגיל 2

תשובה 1

א. נכפיל את המשוואה בגורם $e^{\int^x 2dt} = e^{2x}$ ונקבל: $\left(e^{2x}y\right)' = xe^{2x} + e^x \Leftarrow$
$y = ce^{-2x} + e^{-x} + \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$.

ב. נכפיל את המשוואה בגורם $e^{\int^x \frac{-dt}{t}} = e^{-\ln(x)} = \frac{1}{x}$ ונקבל: $\left(\frac{y}{x}\right)' = 1 \Leftarrow y = cx + x^2$.

ג. נחלק את המשוואה ב $x\ln(x)$ ונקבל: $y' + \frac{m}{x\ln(x)}y = \frac{\ln^{-m}(x)}{x\ln(x)}$. נכפיל את המשוואה בגורם $e^{\int^x \frac{mdt}{x\ln(x)}} = e^{m\ln(\ln(x))} = \ln^m(x)$ ונקבל $\left(\ln^m(x)y\right)' = \frac{1}{x\ln(x)} \Leftarrow$
$y = \ln^{-m}(x)(c + \ln(\ln(x)))$.

ד. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{3x - y^2} \Leftarrow \frac{dx}{dy} = \frac{3x - y^2}{y} \Leftarrow$ נקבל משוואה ליניארית ב x $x' - \frac{3}{y}x = -y$ נכפיל את המשוואה בגורם $e^{\int^y \frac{-3dt}{t}} = e^{-3\ln(y)} = \frac{1}{y^3}$ ונקבל: $\left(\frac{x}{y^3}\right)' = -\frac{1}{y^2} \Leftarrow x = cy^3 + y^2$.

תשובה 2

אם $B + \int_{t_0}^{t} a(s)x(s)ds = 0$, אז $x(t) \le 0$ ו $B \ge 0$.לכן באופן מידי נובע כי
$x(t) \le 0 \le B\exp\left[\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right]$.

אזי האי-שוויון הנתון שקול ל $\frac{x(t)}{B + \int_{t_0}^{t} a(s)x(s)ds} \le 1$. נכפיל ב $a(t)(a(t) \ge 0)$ ונקבל אחרי אינטגרציה:

$\int_{t_0}^{t} \frac{x(s)a(s)ds}{B+\int_{t_0}^{s} a(r)x(r)dr} \le \int_{t_0}^{t} a(s)ds$. לכן $\ln(B+\int_{t_0}^{t} a(s)x(s)ds) - \ln B \le \int_{t_0}^{t} a(s)ds$.

מכאן $B+\int_{t_0}^{t} a(s)x(s)ds \le B\exp(\int_{t_0}^{t} a(s)ds)$. אבל האשיוויון הנתון : $x(t) \le B+\int_{t_0}^{t} a(s)x(s)ds$.

ואז נובע כי $x(t) \le B\exp\left[\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right]$.

תשובה 3

זוהי משוואת ברנולי: $y' - y\tan(x) = y^4\cos(x)$, נציב $z = y^{-3}$ ונקבל:

$z' + 3\tan(x)z = -3\cos(x) \Leftarrow$ נכפיל את המשוואה בגורם $e^{\int^x 3\tan(t)dt} = e^{-3\ln(\cos(x))} = \frac{1}{\cos^3 x}$

ונקבל: $\left(\frac{z}{\cos^3(x)}\right)' = \frac{-3}{\cos^2(x)} \Leftarrow z = c\cos^3(x) - 3\sin(x)\cos^2(x) \Leftarrow$

$$y = \sqrt[3]{\frac{1}{c\cos^3(x) - 3\sin(x)\cos^2(x)}}$$

תשובה 4

נכפיל את המשוואה בגורם $e^{\int^x adt} = e^{ax}$ ונקבל: $\left(e^{ax}y\right)' = e^{ax}f(x) \Leftarrow$

$$y(x) = e^{-ax}\left(c + \int_0^x f(s)e^{as}ds\right)$$

$$|y(x)| = \left|e^{-ax}\left(c + \int_0^x f(s)e^{as}ds\right)\right| = e^{-ax}\left|c + \int_0^x f(s)e^{as}ds\right| \le e^{-ax}\left(|c| + \left|\int_0^x f(s)e^{as}ds\right|\right) \le$$

$$e^{-ax}\left(|c| + \int_0^x \left|f(s)e^{as}\right|ds\right) = e^{-ax}\left(|c| + \int_0^x |f(s)|e^{as}ds\right) \le e^{-ax}\left(|c| + \int_0^x Me^{as}ds\right) = e^{-ax}\left(|c| + \frac{M}{a}e^{ax}\right) =$$

$$|c|e^{-ax} + \frac{M}{a} \le |c| + \frac{M}{a}$$

ואכן **כל** פתרון חסום בקטע $[0,\infty)$.

תשובה 5

כוון ש y_1, y_2, y_3 פתרונות פרטיים יכולים לכתוב:

$y_1' + a(x)y_1 = b(x) \quad (1)$, $y_2' + a(x)y_2 = b(x) \quad (2)$, $y_3' + a(x)y_3 = b(x) \quad (3)$

לכן: $(y_3-y_1)'+a(x)(y_3-y_1)=0 \Leftarrow \quad y_3-y_1=C_1e^{-\int_{x_0}^{x}a(s)ds} \quad (4)$

$(y_2-y_3)'+a(x)(y_2-y_3)=0 \Leftarrow \quad y_2-y_3=C_2e^{-\int_{x_0}^{x}a(s)ds} \quad (5)$

מ (4) ו (5) מקבלים:

$$\frac{y_2-y_3}{y_3-y_1}=\frac{C_2}{C_1}=c=const.$$