# משוואות דיפרנציאליות רגילות

## פתרון תרגיל 1

## שאלה 1

פתור את המשוואה הבאה לכל ערך של $a \in \mathbf{N}$ : $\begin{cases} y' = y^a \\ y(a) = a-2 \end{cases}$

## תשובה 1

אם $a \neq 1$

$$\frac{dy}{dx} = y^a \Rightarrow \frac{dy}{y^a} = dx \Rightarrow \frac{y^{1-a}}{1-a} = x + c \Rightarrow y = ((1-a)(x+c))^{\frac{1}{1-a}}.$$

אם $a = 1$

$$\frac{dy}{dx} = y \Rightarrow \frac{dy}{y} = dx \Rightarrow \ln|y| = x + c \Rightarrow y = Ce^x$$

בשני המקרים כיוון שחילקנו ב $y^a$ , יש לבדוק האם $y = 0$ הוא פתרון, והוא פתרון עבור $a \neq 0$ .
ובצירוף תנאי ההתחלה:
עבור $a = 1$ : $y = -e^{x-1}$
עבור $a = 2$ : $y = 0$
אחרת: $y = \left((1-a)\left(x + \left(\frac{a-2}{1-a}\right)^{1-a} - a\right)\right)^{\frac{1}{1-a}}$

## שאלה 2

א. הראה כי לכל ערך של $c \in \mathbf{R}$ , הפונקציה $y = \frac{2x}{c - x^2}$ היא פתרון של המשוואה:

$$y' = \frac{y}{x} + y^2$$

ב. כמה פתרונות למשוואה הנ"ל מקיימות את תנאי ההתחלה: $y(0) = 0$ ?

ג. כמה פתרונות למשוואה הנ"ל מקיימות את תנאי ההתחלה: $y(1) = 0$ ?

## תשובה 2

א. $y = \frac{2x}{c - x^2}$ , $y' = \frac{2(c + x^2)}{(c - x^2)^2}$ . ואכן:

$$y^2 + \frac{y}{x} = \frac{4x^2}{(c-x^2)^2} + \frac{2}{c - x^2} = \frac{4x^2 + 2(c - x^2)}{(c-x^2)^2} = \frac{2(c + x^2)}{(c-x^2)^2} = y'$$

ב. כל הפונקציות מקיימות את תנאי ההתחלה.

ג. אף פונקציה מהנתונות אינה מקיימת את המשוואה, אך הפתרון $y=0$ (בדוק כי הוא אכן מקיים את המשוואה), מקיים את תנאי ההתחלה.

# שאלה 3

פתור:

א) $\begin{cases} 3y^2y'+16x=2xy^3 \\ x\to\infty \quad \text{כאשר} \quad \text{חסום} \quad y(x) \end{cases}$ ב) $\begin{cases} y'=3\sqrt[3]{y^2} \\ y(2)=0 \end{cases}$

# תשובה 3

א)

$3y^2\frac{dy}{dx}=2xy^3-16x \Rightarrow 3y^2\frac{dy}{dx}=2x(y^3-8)$. אם $y\neq 2$ ניתן לחלק ב $y^3-8$ ולקבל:

$\frac{3y^2dy}{y^3-8}=2xdx \Rightarrow \int\frac{3y^2dy}{y^3-8}=\int 2xdx$.

$\Rightarrow \ln(y^3-8)=x^2+C \Rightarrow y(x)=\sqrt{8+C_1e^{x^2}}\ ,C_1>0$ .

אבל כאשר $x\to\infty$ $y(x)=\sqrt{8+C_1e^{x^2}}\to\infty$ , ולכן הפתרון הזה לא חסום באינסוף.

קל לבדוק ש $y\equiv 2$ פתרון והוא חסום כאשר $x\to\infty$ . לכן $y\equiv 2$ פתרון .

ב) $\frac{dy}{dx}=3y^{\frac{2}{3}}$. כאשר $y\neq 0$ אפשר לחלק ב $3y^{\frac{2}{3}}$ ולקבל:

$\frac{1}{3}y^{\frac{-2}{3}}dy=dx$ . $\Leftarrow \frac{1}{3}\int y^{\frac{-2}{3}}dy=\int dx$ כלומר $y^{\frac{1}{3}}=x+C$. נציב את התנאי ההתחלה

$y(2)=0 \Rightarrow C=-2 \Rightarrow$

$y(x)=(x-2)^3$ פתרון. קל לבדוק ש $y\equiv 0$ גם פתרון .

# שאלה 4

פתור את המשוואות הבאות:

1. $y'=\sqrt{5x+2y-3}$
2. $(2x+y+1)dx=(4x+2y-3)dy$

## תשובה 4

1. כאן $f(z)=\sqrt{z},\ a=5,\ b=2,\ c=-3$ $\Leftarrow$ $z=5x+2y-3$ $\Leftarrow$

$y'=\frac{z'-5}{2}$ $\Leftarrow$ $\frac{z'-5}{2}=\sqrt{z}$ $\Leftarrow$ $x=\int\frac{dz}{2\sqrt{z}+5}$ $\Leftarrow$
$x+C=\sqrt{5x+2y-3}-2.5\ln\left(2\sqrt{5x+2y-3}+5\right)$. במקרה זה $bf(z)+a>0$, ולכן אין פתרונות נוספים.

2. כאן $f(z)=\frac{z+1}{2z-3},\ a=2,\ b=1,\ c=0$ $\Leftarrow$ $z'-2=\frac{z+1}{2z-3}$

$$\Leftarrow x=\int\frac{dz}{\frac{z+1}{2z-3}+2}=\int\frac{2z-3}{5z-5}\,dz$$

$\Leftarrow$ $x+C=\frac{2}{5}(2x+y)-\frac{1}{5}\ln(2x+y-1)$ $\Leftarrow$ $Ce^{2y-x}=2x+y-1$.

פתרון $bf(z)+a=0$ יביא לפתרון $y=1-2x$.

## שאלה 5

א. תהי $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ הפיכה, גזירה ועולה ממש.

פתור את המשוואה: $f'(y)y'=xf(y)$ (תן פתרון כללי).

ב. מצא פתרון למשוואה המקיים את התנאי: $\lim\limits_{x\to\infty}|y(x)|<\infty$.

## תשובה 5

א. $f'(y)y'=xf(y)$ $\Leftarrow$ $\frac{f'(y)dy}{f(y)}=xdx$ (עבור $f(y)\neq 0$) $\Leftarrow$ $\ln|f(y)|=\frac{x^2}{2}+c$ $\Leftarrow$

$f(y)=Ke^{\frac{x^2}{2}}$ $\Leftarrow$ $y=f^{-1}\left(Ke^{\frac{x^2}{2}}\right)$.

עבור $f(y)=0$ נקבל פתרון יחיד $y=f^{-1}(0)$, שהוא אכן פתרון המקיים את המשוואה.

ב. מכיוון ש $f$ עולה ועל (הפיכה) גם $f^{-1}$ כזו ולכן לכל $K\neq 0$ מתקיים:

$\lim\limits_{x\to\infty}|y(x)|=\lim\limits_{x\to\infty}\left|f^{-1}\left(Ke^{\frac{x^2}{2}}\right)\right|=\infty$ (השתמשנו בעובדה ש $f^{-1}$ רציפה).

ומכאן הפונקציה אינה חסומה.

הפתרון היחיד, לכן, המקיים את תנאי החסימות הוא הפתרון $y=f^{-1}(0)$.