משוואות דיפרנציאליות רגילות 1

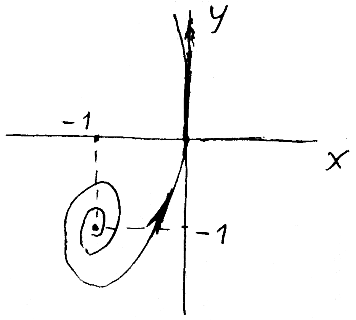
פתרון לתרגיל 13

תשובה 1

לצייר את הדיוקנים הפזיים של המערכות ,למיין את הנקודות הקריטיות.

$\begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = x + y + 2 \end{cases}$, נקי' קריטית: $x = -1, y = -1$. $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2, \lambda = 1 \pm i$,

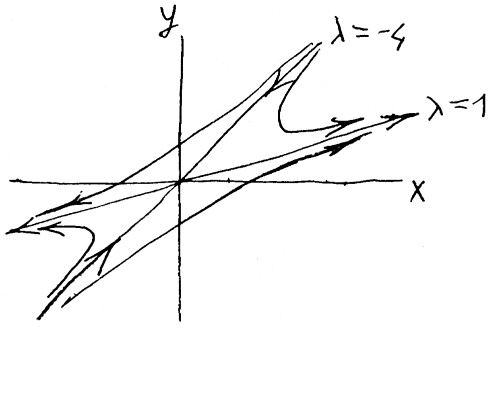
זה מוקד לא יציב. נחשב $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} \Big\|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, מכאן הדיוקן הפזי



$\begin{cases} \dot{x} = 3x - 7y \\ \dot{y} = 2x - 6y \end{cases}$, נקי' קריטית: $x = 0, y = 0$. $p(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda - 4 = (\lambda + 4)(\lambda - 1), \lambda = -4, 1$, זה אוכף.

וקטורים עצמיים: $\lambda = -4: \ x = y, e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \lambda = 1: \ 2x = 7y, e_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$.

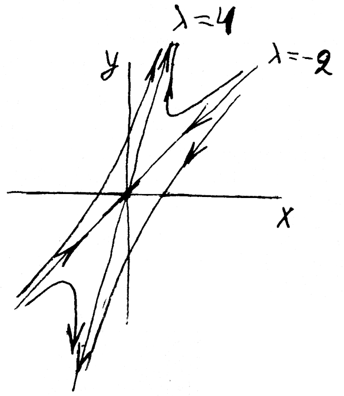
מכאן הדיוקן הפזי



$\begin{cases}\dot{x}=-5x+3y\\ \dot{y}=-9x+7y\end{cases}$, נק' קריטית: $x=0, y=0$. $p(\lambda)=\lambda^2-2\lambda-8=(\lambda-4)(\lambda+2), \lambda=-2, 4$, זה אוכף.

וקטורים עצמיים: $\lambda=-2:\ x=y, e_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$; $\lambda=4:\ 9x=3y, e_1=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$.

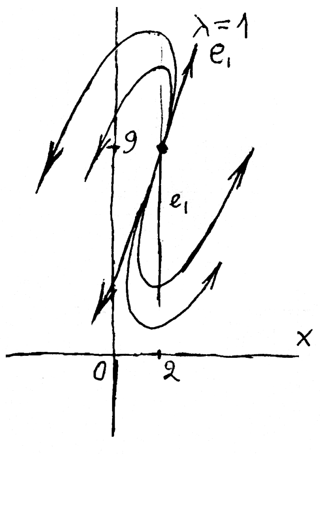
מכאן הדיוקן הפזי



$\begin{cases}\dot{x}=4x-y+1\\ \dot{y}=9x-2y\end{cases}$, נק' קריטית: $x=2, y=9$. $p(\lambda)=\lambda^2-2\lambda+1, \lambda=1$, זה קשר מנוון לא יציב.

וקטורים עצמיים: $\lambda=1$: $\begin{cases}3x\text{-}y= & 0\\ 9x\text{-}3y= & 0\end{cases}, e_1=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$; וקטור עצמי מוכלל: $\begin{cases}3x\text{-}y= & 1\\ 9x\text{-}3y= & 3\end{cases}, e_2=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$;.

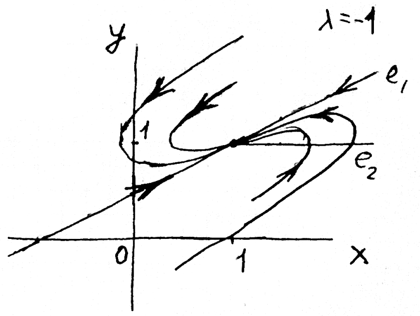
בקואורדינאטות z_1, z_2 הנלקחים לפי הצירים e_1, e_2 (e_1, e_2 מגדירים כיוונים חיוביים של צירי z_1, z_2) הקווים מגיעים לאין-סוף ברבעים $\lambda z_1 z_2 > 0, \lambda=1$. מכאן הדיוקן הפזי



$\begin{cases} \dot{x} = 3x - 8y + 5 \\ \dot{y} = 2x - 5y + 3 \end{cases}$, נקי קריטית: $x = 1, y = 1$. $p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1, \lambda = -1$, זה קשר מנוון יציב.

וקטורים עצמיים: $\lambda = -1$: $\begin{cases} 4x\text{-}8y = 0 \\ 2x\text{-}4y = 0 \end{cases}, e_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix};$ וקטור עצמי מוכלל: $\begin{cases} 4x\text{-}8y = 2 \\ 2x\text{-}4y = 1 \end{cases}, e_2 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \end{pmatrix};$.

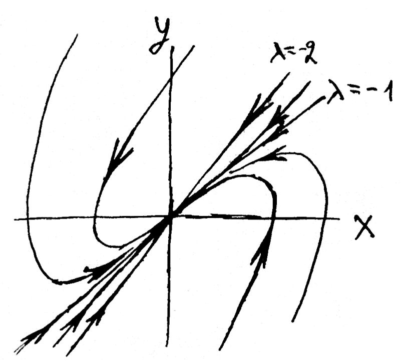
בקואורדינאטות z_1, z_2 נלקחים בצירים e_1, e_2 (e_1, e_2 מגדירים כיוונים חיוביים של צירי z_1, z_2) הקווים מגיעים לאין-סוף ברבעים $\lambda z_1 z_2 > 0, \lambda = -1$. מכאן הדיוקן הפזי



$\begin{cases} \dot{x} = 2x - 3y \\ \dot{y} = 4x - 5y \end{cases}$, נקי קריטית: $x = 0, y = 0$. $p(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 1)(\lambda + 2), \lambda = -1, -2$,

זה קשר יציב. וקטורים עצמיים: $\lambda = -2$: $4x = 3y, e_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}; \lambda = -1$: $x = y, e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

מכאן הדיוקן הפזי

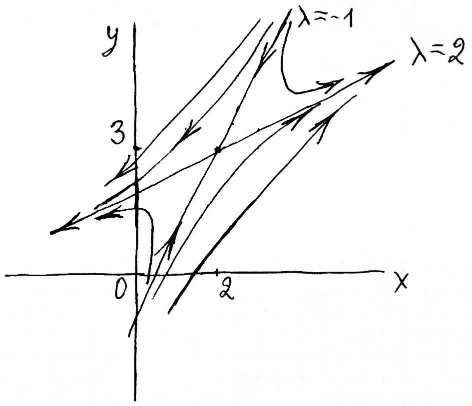


השוו שתי תמונות אחרונות. סימו לב שכאשר e_1, e_2 מתקרבים אחד לשיני קשר עובר לקשר מנוון.

$\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y \\ \dot{y} = 2x - 2y + 2 \end{cases}$, נק' קריטית: $x = 2, y = 3$. $p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda + 1), \lambda = -1, 2$, זה אוכף.

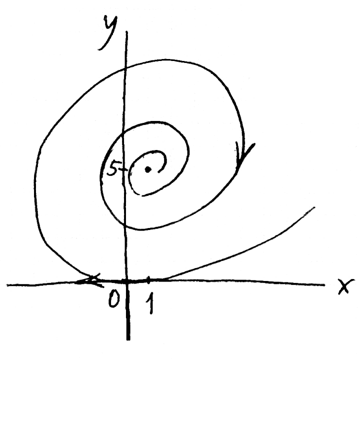
וקטורים עצמיים: $\lambda = -1: \ 2x = y, e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \lambda = 2: \ x = 2y, e_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

מכאן הדיוקן הפזי



, $\begin{cases} \dot{x} = -3x + y - 2 \\ \dot{y} = -5x + y \end{cases}$, נק' קריטית: $x = 1, y = 5$. $p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 2, \lambda = -1 \pm i$,

זה מוקד יציב. נחשב $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}\Big\|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, מכאן הדיוקן הפזי

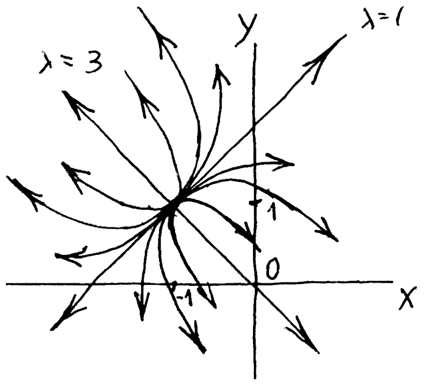


תוספת

$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y + 3 \\ \dot{y} = x + 2y - 1 \end{cases}$, נק' קריטית: $x = -1, y = 1$. $\lambda = 1, 3$, $p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$,

זה קשר לא יציב. וקטורים עצמיים: $\lambda = 1:\ x = y, e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \lambda = 3:\ x = -y, e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

מכאן הדיוקן הפזי



סימו לב שבמקרה של קשר או קשר מנוון יש השקת הקווים בנקודה הקריטית, ובמקרה של אוכף צירים של ווקטורים עצמיים משמשים אסימפטוטות.

דרך כל נקודה עובר קו פזי יחיד. כל פתרון קבוע מיוצג על-ידי נקודה קריטית. כל פתרון מוארך לכל ציר הזמן, כאשר $t = \pm\infty$ תמיד מתאים לאין-סוף או לנקודה קריטית.

תשובה 2

מצא פתרון בעיית קושי .

$$y(0)=\cos\varepsilon, \dot y(0)=\varepsilon\ ,\ \ddot y = 2\arctan\ y+\tfrac{3}{2}\dot y\cos\varepsilon-\varepsilon(e^{2t}y+\dot y^2)-\tfrac{1}{2}\pi$$

בקירוב לינארי לגבי $\varepsilon\approx 0$ כאשר t משתנה בקטע סגור כלשהו סביב 0.

את הפתרון אפשר להציג בצורה $y=\Phi(t,\varepsilon)=\Phi(t,0)+\Phi'_\varepsilon(t,0)\varepsilon+R(t,\varepsilon)$, כאשר השארית מקבלת צורה $R(t,\varepsilon)=\frac{1}{2}\Phi''_{\varepsilon\varepsilon}(t,\theta\varepsilon)\varepsilon^2, \theta\in(0,1)$. לכן $R(t,\varepsilon)=O(\varepsilon^2)$ כי (t,ε) שייך לתחום קומפקטי מסויים, $\Phi(t,\varepsilon)$ פונקציה חלקה ב t,ε, ולכן $\Phi''_{\varepsilon\varepsilon}$ חסומה.

המסקנה היא ש- $y=\Phi(t,0)+\Phi'_\varepsilon(t,0)\varepsilon+O(\varepsilon^2)$ ושצריך למצוא $\Phi(t,0),\Phi'_\varepsilon(t,0)$.

א. ניקח $\varepsilon=0$. נקבל $\ddot y = 2\arctan\ y+\frac{3}{2}\dot y-\frac{1}{2}\pi$, $y(0)=1,\dot y(0)=0$

מכאן $y=\Phi(t,0)=1$

ב. נגזור לפי ε את המשוואה המקורית ונקבל

$$\ddot y'_\varepsilon = 2\frac{y'_\varepsilon}{1+y^2}+\tfrac{3}{2}\dot y'_\varepsilon\cos\varepsilon-\tfrac{3}{2}\dot y'\sin\varepsilon-(e^{2t}y+\dot y^2)-\varepsilon(e^{2t}y+\dot y^2)'_\varepsilon\ ,\ y'_\varepsilon(0)=-\sin\varepsilon, \dot y'_\varepsilon(0)=1\ .$$

נציב $\varepsilon=0$ וכתוצאה מכך $y=\Phi(t,0)=1$, $z=y'_\varepsilon=\Phi'_\varepsilon(t,0)$ (סימון) . נקבל

$\ddot z-\frac{3}{2}\dot z-z=-e^{2t}$, $z(0)=0,\dot z(0)=1$.

$p(\lambda)=\lambda^2-\frac{3}{2}\lambda-1=(\lambda-2)(\lambda+\frac{1}{2}), \lambda=2,-\frac{1}{2}$. יש פה רזוננס. נחפש פתרון פרטי בצורה $z_p=ate^{2t}$ מכאן $\dot z_p=a(e^{2t}+2te^{2t}), \ddot z_p=a(4e^{2t}+4te^{2t})$ ו $a=-\frac{2}{5}$. לכן $z=c_1e^{2t}+c_2e^{-\frac{1}{2}t}-\frac{2}{5}te^{2t}$.

מתנאי התחלה נקבל $\begin{cases} c_1+c_2=0 \\ 2c_1-\frac{1}{2}c_2-\frac{2}{5}=1\end{cases}$, $c_1=\frac{14}{25}, c_2=-\frac{14}{25}$.

התשובה: $y=1+(\frac{14}{25}e^{2t}-\frac{14}{25}e^{-\frac{1}{2}t}-\frac{2}{5}te^{2t})\varepsilon+O(\varepsilon^2)$

או אפשר גם לרשום $y=1+(\frac{14}{25}e^{2t}-\frac{14}{25}e^{-\frac{1}{2}t}-\frac{2}{5}te^{2t})\varepsilon+o(\varepsilon)$.

תשובה 3

מצא את המקדמים $c_0, \dots, c_4$ של פיתוח טיילור $x = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + c_4 t^4 + o(t^4)$ בסביבה של $t = 0$
לפתרון בעיית קושי

$$e^t \ddot{x} - t\dot{x} + x = \ln(1+t), \quad x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0$$

מחשבים

$$x = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + c_4 t^4 + \dots$$
$$\dot{x} = c_1 + 2c_2 t + 3c_3 t^2 + 4c_4 t^3 + \dots$$
$$\ddot{x} = 2c_2 + 6c_3 t + 12c_4 t^2 + \dots$$
$$(1 + t + \tfrac{1}{2}t^2 + \tfrac{1}{6}t^3 + \dots)(2c_2 + 6c_3 t + 12c_4 t^2 + \dots) - t(c_1 + 2c_2 t + 3c_3 t^2 + 4c_4 t^3 + \dots)$$
$$+ c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + c_4 t^4 + \dots = t - \tfrac{1}{2}t^2 + \tfrac{1}{3}t^3 - \dots$$

מתנאי התחלה $c_0 = 1, \ c_1 = 0$

$$\begin{array}{l|ll} t^0 & 2c_2 + c_0 = 0 & c_2 = -\tfrac{1}{2}c_0 = -\tfrac{1}{2} \\ t^1 & 2c_2 + 6c_3 - c_1 + c_1 = 1 & c_3 = \tfrac{1}{6}(1 - 2c_2) = \tfrac{1}{3} \\ t^2 & 12c_4 + 6c_3 + c_2 - 2c_2 + c_2 = -\tfrac{1}{2} & c_4 = \tfrac{1}{12}(-\tfrac{1}{2} - 6c_3) = -\tfrac{5}{24} \end{array}$$

התשובה: $x = 1 - \tfrac{1}{2}t^2 + \tfrac{1}{3}t^3 - \tfrac{5}{24}t^4 + o(t^4)$