משוואות דיפרנציאליות רגילות 1

פתרון לתרגיל 12

תשובה 1

בשיטת וריאציית הפרמטרים מצא את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות

א. $\dot{y}=\begin{pmatrix}4 & -2\\ 8 & -4\end{pmatrix}y+\begin{pmatrix}t^{-3}\\ -t^{2}\end{pmatrix}$. נוסיף תנאי התחלה $y(1)=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$.

$p(\lambda)=\lambda^{2}$, ווקטור עצמי: $e_1=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}, Ae_1=0$, ווקטור עצמי מוכלל: $e_2=\begin{pmatrix}1/4\\ 0\end{pmatrix}, Ae_2=e_1$.

הפתרון של הבעיה ההומוגנית: $E=\begin{pmatrix}1 & 1/4\\ 2 & 0\end{pmatrix}, y_h=Ee^{\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}t}E^{-1}y_h(0)=Ee^{\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}t}C$. לכן

$$y_h=\begin{pmatrix}1 & 1/4\\ 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 0\end{pmatrix}C=\begin{pmatrix}1 & t+1/4\\ 2 & 2t\end{pmatrix}C,\ C=\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}, \Phi(t)=\begin{pmatrix}1 & t+1/4\\ 2 & 2t\end{pmatrix}$$

נחפש פתרון פרטי בצורה $y_p=\Phi(t)C(t)$. נציב ונקבל $\Phi(t)\dot{C}=\begin{pmatrix}t^{-3}\\ -t^{2}\end{pmatrix}$,

$$\dot{C}=\Phi^{-1}(t)\begin{pmatrix}t^{-3}\\ -t^{2}\end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix}2t & -(t+1/4)\\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t^{-3}\\ -t^{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2t^{3}-\frac{1}{2}t^{2}-4t^{-2}\\ 2t^{2}+4t^{-3}\end{pmatrix},$$

$$C(t)=\int_1^t\begin{pmatrix}-2t^{3}-\frac{1}{2}t^{2}-4t^{-2}\\ 2t^{2}+4t^{-3}\end{pmatrix}dt=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}t^{4}-\frac{1}{6}t^{3}+4t^{-1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}-4\\ \frac{2}{3}t^{3}-2t^{-2}-\frac{2}{3}+2\end{pmatrix},$$

$\mathrm{C}(1)=0, C(t)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}t^{4}-\frac{1}{6}t^{3}+4t^{-1}-3\frac{1}{3}\\ \frac{2}{3}t^{3}-2t^{-2}+1\frac{1}{3}\end{pmatrix}$. לכן הפתרון הכללי הוא

$$y=c_1\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}t+1/4\\ 2t\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & t+1/4\\ 2 & 2t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}t^{4}-\frac{1}{6}t^{3}+4t^{-1}-3\frac{1}{3}\\ \frac{2}{3}t^{3}-2t^{-2}+1\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

(שוב השתמשנו באותו סימון C). מתנאי התחלה ו $y_p(1)=0$ מקבלים $t=1$, $\begin{pmatrix}1 & t+1/4\\ 2 & 2t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$.

$$C=\Phi^{-1}(1)\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix}2 & -1\frac{1}{4}\\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\ 4\end{pmatrix}.$$

ב. $\ddot{y}+\dot{y}=\dfrac{1}{\sin t}$ כאשר $0<t<\pi$

הפתרון של הבעיה ההומוגנית: $p(\lambda)=\lambda^3+\lambda,\ y_h=c_1+c_2\cos t+c_3\sin t$.

נעבור לבעיה ווקטורית: $Y=\begin{pmatrix}y\\ \dot{y}\\ \ddot{y}\end{pmatrix},\dot{Y}=AY+\begin{pmatrix}0\\0\\ \frac{1}{\sin t}\end{pmatrix},Y_h=\begin{pmatrix}1&\cos t&\sin t\\0&-\sin t&\sin t\\0&-\cos t&-\sin t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$

נחפש פתרון פרטי בצורה $Y_p=\begin{pmatrix}1&\cos t&\sin t\\0&-\sin t&\sin t\\0&-\cos t&-\sin t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1(t)\\c_2(t)\\c_3(t)\end{pmatrix}$ ולכן נקבל

$\begin{pmatrix}1&\cos t&\sin t\\0&-\sin t&\sin t\\0&-\cos t&-\sin t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{c}_1(t)\\ \dot{c}_2(t)\\ \dot{c}_3(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\ \frac{1}{\sin t}\end{pmatrix}$. מכאן $\dot{c}_1=\frac{1}{\sin t},\dot{c}_2=-\cot t,\dot{c}_3=-1$.

לכן $c_1=-\frac{1}{2}\ln(\dfrac{1+\cos t}{1-\cos t}),c_2=-\ln(\sin t),c_3=-t$.

פתרון כללי: $y(t)=c_1+c_2\cos x+c_3\sin x-\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+\cos t}{1-\cos t}\right)-\cos t\ln(\sin t)-t\sin t$

תשובה 2

פתור את המשוואות הבאות

א. $t^2\ddot{y}+3t\dot{y}-3y=0$

$p(\lambda)=\lambda^2+2\lambda-3=(\lambda-3)(\lambda+1)$, $t=e^\tau$. נקבל $y=c_1t^3+c_2t^{-1}$. המקרים $t>0$ ו $t<0$ הם נפרדים. למשל ניקח $c_1=1,c_2=0$ כאשר $t>0$ ו $c_1=-1,c_2=0$ כאשר $t<0$. לכן גם $y=|t|^3$ הוא הפתרון.

ב. $t^2\ddot{y}+3t\dot{y}+5y=0$

$p(\lambda)=\lambda^2+2\lambda+5=(\lambda+1)^2+4$, $t=e^\tau$. נקבל

$y=c_1t^{-1}\cos(2\ln|t|)+c_2t^{-1}\sin(2\ln|t|)$. במקרים $t>0$ ו $t<0$ הפרמטרים c_1,c_2 נבחרים בנפרד.

ג. $t^2\ddot{y}-4t\dot{y}+6y=t^{-2}+\sin(\ln t)+t^3e^t$ כאשר $t>0$.

אחרי ההחלפה $t=e^\tau$ נקבל את המשוואה $y''-5y'+6y=e^{-2\tau}+\sin\tau+t^3e^t$

הפתרון של הבעיה ההומוגנית:

$t=e^\tau, p(\lambda)=\lambda^2-5\lambda+6, y_h=c_1e^{2\tau}+c_2e^{3\tau}=c_1t^2+c_2t^3$.

הפתרון הפרטי מורכב משני חלקים. את החלק הראשון נמצא דרך ההחלפה מלעיל בצורה $y_{p1}=ae^{-2\tau}+b\cos\tau+c\sin\tau$ ונקבל $\begin{cases}5b-5c=0\\5b+5c=1\end{cases}, 20a=1,\ a=0.05,b=c=0.1$.

נחלק ב t^2 כדי לקבל מקדם 1 ל $\ddot{y}$. נקבל משוואה לצורך חיפוש y_{p2}: $\ddot{y}-\frac{4}{t}\dot{y}+\frac{6}{t^2}y=te^t$

נעבור לבעיה ווקטורית ונחפש פתרון פרטי בצורה $\begin{pmatrix}y_{p2}\\ \dot{y}_{p2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t^2&t^3\\2t&3t^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1(t)\\c_2(t)\end{pmatrix}$.

לכן $\begin{pmatrix} t^2 & t^3 \\ 2t & 3t^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{c}_1(t) \\ \dot{c}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ te^t \end{pmatrix}$, מקבלים $\dot{c}_1 = -e^t, c_1 = -e^t$, $\dot{c}_2 = -e^t / t, c_2 = -\int_1^t \frac{e^s}{s} ds$.
האינטגרל האחרון לא ניתן לחישוב (מצטער).

$$y = c_1 t^2 + c_2 t^3 + 0.05t^{-2} + 0.1\cos\ln t + 0.1\sin\ln t - t^2 e^t - t^3 \int_1^t \frac{e^s}{s} ds$$

תשובה 3

א. פתור את המשוואה $t\ddot{y} + 2\dot{y} + ty = 0$ כאשר ידוע פתרון פרטי $\frac{\sin t}{t}, t \neq 0$.

המשוואה היא $\ddot{y} + \frac{2}{t}\dot{y} + y = 0$

מנוסחת אבל נקבל $c_1 \frac{1}{t^2} = \tilde{c}_1 e^{-\int_1^t \frac{2}{s} ds} = \begin{vmatrix} \frac{\sin t}{t} & y \\ \left(\frac{\sin t}{t}\right)^{\bullet} & \dot{y} \end{vmatrix}$. נחלק ב $\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2$ ונקבל

$\left(\frac{y}{\frac{\sin t}{t}}\right)^{\bullet} = c_1 \frac{1}{\sin^2 t}$. מכאן $y = -c_1 \frac{\sin t}{t}\cot t + c_2 \frac{\sin t}{t} = \hat{c}_1 \frac{\cos t}{t} + c_2 \frac{\sin t}{t}$.

ב. פתור את המשוואה $t\dot{y} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} y$ כאשר ידוע פתרון פרטי $\begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}, t \neq 0$.

המשוואה היא $\dot{y} = \frac{1}{t}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} y$

מנוסחת אבל נקבל $c_1 = \begin{vmatrix} y_1 & t \\ y_2 & t \end{vmatrix}$. מכאן $y_1 = y_2 + \frac{c_1}{t}$ וממשוואה השנייה $\dot{y}_2 = \frac{1}{t} y_2 + \frac{4c_1}{t^2}$.

לכן $y_1 = -\frac{c_1}{t} + c_2 t, y_2 = -2\frac{c_1}{t} + c_2 t$. התשובה: $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = y_1 = \tilde{c}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\frac{1}{t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t$.