משוואות דיפרנציאליות רגילות 1

פתרון של תרגיל 11

תשובה 1

מה היא הצורה שבה מחפשים פתרון פרטי למשוואות הבאות בשיטת המקדמים הבלתי ידועים?

א. $\dddot{y}-3\ddot{y}+3\dot{y}-y=t^2+t\sin t-te^t$.

$p(\lambda)=(\lambda-1)^3, \lambda_{1,2,3}=1$, $y_p=y_{p1}+y_{p2}+y_{p3}$,

$y_p=c_1+c_2t+c_3t^2+\sin t\,(c_4+c_5t)+\cos t\,(c_6+c_7t)+t^3e^t(c_8+c_9t), c_j\in\mathbf{R}$.

$c_j\in\mathbf{C}$ מעל $\mathbf{C}$

ב. $y''+6y'+13y=1-e^{-3t}+te^{-3t}\sin t$

, $y_p=y_{p1}+y_{p2}+y_{p3}$, $p(\lambda)=\lambda^2+6\lambda+13, \lambda_{1,2}=-3\pm 2i$.

$y_p=c_1+c_2e^{-3t}+e^{-3t}\sin t\,(c_4+c_5t)+e^{-3t}\cos t\,(c_6+c_7t), c_j\in\mathbf{R}$. $c_j\in\mathbf{C}$ מעל $\mathbf{C}$

ג. $y^{(4)}-8y'=t^2-te^{-t}\sin\sqrt{3}t+1+\cos t$.

$p(\lambda)=\lambda(\lambda^3-8)=\lambda(\lambda-2)(\lambda^2+2\lambda+4), \ \lambda_{1,2,3,4}=0,2,-1\pm i\sqrt{3}$,

$y_p=t(c_1+c_2t+c_3t^2)+c_3\cos t+c_4\sin t+te^{-t}\cos(\sqrt{3}t)(c_5+c_6t)+te^{-t}\sin(\sqrt{3}t)(c_6+c_7t), c_j\in\mathbf{R}$

. $c_j\in\mathbf{C}$ מעל $\mathbf{C}$

ד. $y^{(4)}+8\ddot{y}+16y=t\sin 2t-e^t$. $p(\lambda)=(\lambda^2+4)^2, \ \lambda_{1,2,3,4}=\pm 2i$,

$y_p=t^2\cos 2t(c_1+c_2t)+t^2\sin 2t(c_3+c_4t)+c_5e^t, c_j\in\mathbf{R}$. $c_j\in\mathbf{C}$ מעל $\mathbf{C}$.

תשובה 2

מה היא הצורה שבה מחפשים פתרון פרטי למשוואות הבאות בשיטת המקדמים הבלתי

א. $\begin{pmatrix}\dot{y}_1\\ \dot{y}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1+\cos 2t\\ t^2+te^t\end{pmatrix}$, $p(\lambda)=\lambda^2+2\lambda+1, \lambda_{1,2}=-1$

, $y_p=c_1+c_2t+c_3t^2+c_4\cos 2t+c_5\sin 2t+e^t(c_6+c_7t), c_j\in\mathbf{R}^2$. $c_j\in\mathbf{C}^2$ מעל $\mathbf{C}$

ב. $\begin{pmatrix}\dot{y}_1\\ \dot{y}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}te^{2t}\cos 3t\\ t^2+e^t\end{pmatrix}$, $p(\lambda)=\lambda^2-4\lambda+13, \lambda_{1,2}=2\pm 3i$

$y_p=c_1+c_2t+c_3t^2+e^{2t}\cos 3t\,(c_4+c_5t+c_6t^2)+e^{2t}\sin 3t\,(c_7+c_8t+c_9t^2)+c_{10}e^t, c_j\in\mathbf{R}^2$

, $c_j\in\mathbf{C}^2$ מעל $\mathbf{C}$

תשובה 3

מצא את הפתרונות הכללי של המערכת.

א. $\begin{pmatrix}\dot y_1\\ \dot y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos t\\ t\end{pmatrix}$

$p(\lambda)=\lambda^2+1,\lambda_{1,2}=\pm i$, $y_p=y_{p1}+y_{p2}$. $\dot y_{p1}=Ay_{p1}+\begin{pmatrix}\cos t\\0\end{pmatrix}$ $\dot y_{p2}=Ay_{p2}+\begin{pmatrix}0\\t\end{pmatrix}$.

מציבים $y_{p1}=\begin{pmatrix}a_1+a_2t\\b_1+b_2t\end{pmatrix}\cos t+\begin{pmatrix}c_1+c_2t\\d_1+d_2t\end{pmatrix}\sin t$.

$\begin{pmatrix}a_2+c_1+c_2t\\b_2+d_1+d_2t\end{pmatrix}\cos t+\begin{pmatrix}-a_1-a_2t+c_2\\-b_1-b_2t+d_2\end{pmatrix}\sin t=\begin{pmatrix}b_1+b_2t+1\\-a_1-a_2t\end{pmatrix}\cos t+\begin{pmatrix}d_1+d_2t\\-c_1-c_2t\end{pmatrix}\sin t$,

מוצאים $c_2=b_2,d_2=-a_2$ ומציבים. אחר-כך מוצאים $a_2=1/2,b_2=0,a_1=-d_1$. בוחרים $b_1=a_1=0$ ומקבלים $y_{p1}=\begin{pmatrix}\frac12 t\\0\end{pmatrix}\cos t+\begin{pmatrix}\frac12\\-\frac12 t\end{pmatrix}\sin t$.

המערכת $\dot y_{p2}=Ay_{p2}+\begin{pmatrix}0\\t\end{pmatrix}$ שקולה למשוואה $\ddot y_{p1,1}+y_{p1,1}=t$, לכן $y_{p1,1}=t, y_{p1}=\begin{pmatrix}t\\1\end{pmatrix}$.

$$y=c_1\begin{pmatrix}\cos t\\-\sin t\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac12 t\\0\end{pmatrix}\cos t+\begin{pmatrix}\frac12\\-\frac12 t\end{pmatrix}\sin t+\begin{pmatrix}t\\1\end{pmatrix}, c_{1,2}\in R .$$

ב. $\begin{pmatrix}\dot y_1\\ \dot y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ t+e^{-t}\end{pmatrix}$

המערכת שקולה למשוואה $\ddot y_1-2\dot y_1-3y_1=t+e^{-t}$, $p(\lambda)=(\lambda-3)(\lambda+1)$. לכן $y_{p1}=a_1+a_2t+a_3te^{-t}, a_j\in\mathbf{R}^2$. מציבים ומוצאים $a_1=\frac29,a_2=-\frac13,a_3=-\frac14$. לכן

$$y_{h1}=c_1e^{3t}+c_2e^{-t}\ , y_{p1}=\frac29-\frac13t-\frac14te^{-t}, y_p=\begin{pmatrix}\frac29-\frac13t-\frac14te^{-t}\\-\frac13-\frac14e^{-t}+\frac14te^{-t}\end{pmatrix}$$

$$y=c_1\begin{pmatrix}e^{3t}\\3e^{3t}\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}e^{-t}\\-e^{-t}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac29-\frac13t-\frac14te^{-t}\\-\frac13-\frac14e^{-t}+\frac14te^{-t}\end{pmatrix}, c_{1,2}\in R$$

תשובה 4

נתונה המערכת: $\dot y=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}y+\begin{pmatrix}\sin at\\0\end{pmatrix}$. מצא בלי לפתור את המערכת את ערכי a עבורם הפתרון חסום לכל t.

הפולינום האופייני הוא λ^2+1, לכן הפתרונות של המערכת ההומוגנית הם פונקציות מחזוריות ולכן חסומות. כאשר אין רזוננס גם פתרון פרטי הוא פונקציה מחזורית כאשר אין רזוננם. רזוננס ישנו כאשר $a=1$. במקרה הזה פתרון פרטי כולל $t\sin t$ או $t\cos t$ ואינו חסום נשאר לבדוק שאין פתרון למערכת כאשר $a=\pm1$ שהוא לא כולל $t\sin t$ או $t\cos t$. באמת מציבים $y=a\cos t+b\sin t, a,b\in R^2$ ומקבלים $\begin{matrix}-a_1=-b_2\pm1\\-a_1=-b_2\end{matrix}$, שבלתי אפשרי.

תשובה 5.

א. איזה זוג פונקציות מין $(1,e^t)$, (t,e^t) יכול לקיים פתרונות יסודיים למשוואה ליניארית הומוגנית מסדר 2 עם מקדמים רציפים? מה היא המשוואה?

מחשבים וורונסקיאנים:

$W[t,e^t]=\begin{vmatrix} t & e^t \\ 1 & e^t \end{vmatrix}=te^t-e^t=(t-1)e^t$, $W[1,e^t]=\begin{vmatrix} 1 & e^t \\ 0 & e^t \end{vmatrix}=e^t\neq 0$. לכן רק $W[1,e^t]$ לא מתאפס ורק $(1,e^t)$. יכול לקיים פתרונות יסודיים למשוואה המשוואה המתאימה ניתנת על-ידי

$W[y,1,e^t]=\begin{vmatrix} y & 1 & e^t \\ \dot{y} & 0 & e^t \\ \ddot{y} & 0 & e^t \end{vmatrix}=e^t\ddot{y}-e^t\dot{y}=0$. זאת אומרת $\ddot{y}-\dot{y}=0$.

ב. איזה זוג פונקציות וקטוריות $\begin{pmatrix}\cos t\\ -1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}t^2+1\\ \cos t\end{pmatrix}$ או $\begin{pmatrix}t\\ -t\end{pmatrix},\begin{pmatrix}t^2+1\\ t\end{pmatrix}$ יכול לקיים פתרונות יסודיים למערכת של 2 משוואות ליניארית הומוגנית מסדר 1 עם מקדמים רציפים? מה היא המערכת?

מחשבים וורונסקיאנים:

$\begin{vmatrix} t & t^2+1 \\ -t & t \end{vmatrix}=t^3+t^2+t$, והוא מתאפס כאשר $t=0$. לאומת זאת

$\begin{vmatrix} \cos t & t^2+1 \\ -1 & \cos t \end{vmatrix}=\cos^2 t+t^2+1>0$ לכן רק $\begin{pmatrix}\cos t\\ -1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}t^2+1\\ \cos t\end{pmatrix}$ יכולים לשמש פתרונות יסודיים למשוואה. המשוואה המתאימה ניתנת על-ידי

$$\dot{y}=\begin{pmatrix}-\sin t & 2t\\ 0 & -\sin t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos t & t^2+1\\ -1 & \cos t\end{pmatrix}^{-1}y$$

.