משוואות דיפרנציאליות רגילות

פתרון של תרגיל 10

תשובה 1

תנועתו של קפיץ מתוח על גבי שולחן חלק נתונה ע"י המשוואה: $m\ddot{x}+kx=0$. כאשר m היא מסת הקפיץ ו - k הוא קבוע הקפיץ. הראה כי סכום האנרגיה הפוטנציאלית והקינטית של הקפיץ נשמרת והוא קבוע. הסבר כיצד ניתן להשתמש בעובדה זו על מנת להוריד את סדר המשוואה.

האנרגיה הפוטנציאלית של הקפיץ: $\frac{1}{2}kx^2$. האנרגיה הקינטית של הקפיץ: $\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\dot{x}^2$.

$$E=\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}m\dot{x}^2 \Rightarrow 0=\frac{dE}{dt}=kx\dot{x}+m\dot{x}\ddot{x}=\dot{x}(kx+m\ddot{x})=0 \Rightarrow E=const.$$

המשוואה: $\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}m\dot{x}^2=c$ היא משוואה מסדר ראשון וניתן לפתור אותה במקום את המשוואה המקורית. אפשר גם לבטא $\dot{x}$ להציב למשוואה ולקבל משוואה מסדר ראשון לגבי $y=\dot{x}$.

תשובה 2

פתור את המשוואות הליניאריות ההומוגניות הבאות, בעלות מקדמים קבועים:

א. $y''-2y'+y=0$, $\lambda_{1,2}=1$, $p(\lambda)=\lambda^2-2\lambda+1$, $y=c_1e^t+c_2te^t$, $c_1,c_2\in\mathbf{R}$.

ב. $y''+6y'+13y=0$, $\lambda_{1,2}=-3\pm 2i$, $p(\lambda)=\lambda^2+6\lambda+13$,
$y=c_1e^{-3t}\cos 2t+c_2e^{-3t}\sin 2t$, $c_1,c_2\in\mathbf{R}$

ג. $y''-6y'+8y=0$, $\lambda_{1,2}=2,4$, $p(\lambda)=\lambda^2-6\lambda+8$, $y=c_1e^{2t}+c_2te^{4t}$, $c_1,c_2\in\mathbf{R}$.

ד. $y^{(4)}-8y'=0$, $p(\lambda)=\lambda^4-8\lambda=\lambda(\lambda-2)(\lambda^2+2\lambda+4), \lambda_{1,2,3,4}=0,2,-1\pm i\sqrt{3}$,
$y=c_1+c_2e^{2t}+c_3e^{-t}\cos\sqrt{3}t+c_4e^{-t}\sin\sqrt{3}t$, $c_1,c_2,c_3,c_4\in\mathbf{R}$.

ה. $y^{(4)}-16y=0$, $p(\lambda)=\lambda^4-16=(\lambda-2)(\lambda+2)(\lambda^2+4), \lambda_{1,2,3,4}=2,-2,\pm 2i$,
$y=c_1e^{2t}+c_2e^{-2t}+c_3\cos 2t+c_4\sin 2t$, $c_1,c_2,c_3,c_4\in\mathbf{R}$.

ו. $y^{(4)}+y''-2y=0$, $p(\lambda)=\lambda^4+\lambda^2-2=(\lambda^2+2)(\lambda^2-1), \lambda_{1,2,3,4}=1,-1,\pm\sqrt{2}i$,
$y=c_1e^t+c_2e^{-t}+c_3\cos\sqrt{2}t+c_4\sin\sqrt{2}t$, $c_1,c_2,c_3,c_4\in\mathbf{R}$.

ז. תוספת (לא היה בשיעור הבית, ולכן לא לבדיקה) $y^{(4)}+8y''+16y=0$,
$p(\lambda)=\lambda^4+8\lambda^2+16=(\lambda^2+4)^2, \lambda_{1,2,3,4}=\pm 2i$,
$y=c_1\cos 2t+c_2\sin 2t+c_3t\cos 2t+c_4t\sin 2t$, $c_1,c_2,c_3,c_4\in\mathbf{R}$.

תשובה 3

נתונה המשוואה הדיפרנציאלית: $y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+a_1y'+a_0y=0$ $\quad(*)$

א. הוכח כי אם $x^k\sin(x)$ פותר את $(*)$ אז $n\geq 2k+2$

אם $x^k\sin(x)$ הוא פתרון אז $\pm i$ הם שורשים של הפולינום האופייני עם ריבוי לפחות $k+1$.

ב. מצא פתרון ל $(*)$ המקיים $y(0)=y'(0)=\ldots y^{(n-1)}(0)=1$ אם ידוע כי $\sum_{k=0}^{n-1}a_k=-1$.

$1+\sum_{k=0}^{n-1}a_k=0$, לכן 1 – שורש של הפולינום האופייני ו- $y=e^x$ פתרון למשוואה.

ג. האם הפתרון שמצאת בחלק ב' הוא הפתרון **היחיד** המקיים את תנאי השאלה? נמק את תשובתך. – כמובן הוא יחיד הודות למשפט של קיום ויחידות.

תשובה 4

באיזה משוואות יש רזוננס ומה הריבוים של השורשים הרזוננסיים? לפתור א ,ב ,ג.

א. $\ddot{y}-y=e^t$, $p(\lambda)=\lambda^2-1,\lambda_{1,2}=\pm1$, $y_h=c_1e^t+c_2e^{-t}$, $c_1,c_2\in\mathbf{R}$.

$e^t\in L^R_{1,1}$, לכן יש רזוננס. מחפשים פתרון פרטי בצורה $y_p=cte^t$:

$ce^t(2+t-t)=e^t$, $c=\frac{1}{2}$. $y=c_1e^t+c_2e^{-t}+\frac{1}{2}te^t$, $c_1,c_2\in\mathbf{R}$.

ב. $\ddot{y}+4y=1+\sin 2t+e^t$. $p(\lambda)=\lambda^2+4,\lambda_{1,2}=\pm2i$, יש רזוננס אחד. מחפשים פתרונות פרטיים בצורה $y_{p1}=a$, $y_{p2}=b_1t\cos 2t+b_2t\sin 2t$, $y_{p3}=ce^t$, כאשר

$\ddot{y}_{p1}+4y_{p1}=1$, $\ddot{y}_{p2}+4y_{p2}=\sin 2t$, $\ddot{y}_{p3}+4y_{p3}=e^t$

מכאן $a=\frac{1}{4}$, $c=\frac{1}{5}$.

$$b_1(-4\sin 2t-4t\cos 2t)+b_2(4\cos 2t-4t\sin 2t)+4(b_1t\cos 2t+b_2t\sin 2t)=\sin 2t$$

$b_1=-\frac{1}{4},b_2=0$. $y=c_1\cos 2t+c_2\sin 2t+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}e^t-\frac{1}{4}t\cos 2t$, $c_1,c_2\in\mathbf{R}$.

ג. $\dddot{y}-y=t+1-\sin t$. $p(\lambda)=\lambda^3-1,\lambda_{1,2,3}=1,-0.5\pm0.5\sqrt{3}i$, אין רזוננס. מחפשים פתרונות פרטיים בצורה $y_{p1}=a_1+a_2t$, $y_{p2}=b_1\cos t+b_2\sin t$, כאשר

$\dddot{y}_{p1}-y_{p1}=t+1$, $\dddot{y}_{p2}-y_{p2}=-\sin t$.

מכאן $0-(a_1+a_2t)=t+1$, $a_1=a_2=-1$,

$b_1\sin t-b_2\cos t-(b_1\cos t+b_2\sin t)=-\sin t$. לכן

$$\begin{cases}b_1+b_2=0\\ b_1-b_2=-1\end{cases},\ b_1=-0.5,\ b_2=0.5.$$

$y=c_1e^t+c_2e^{-0.5t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+c_3e^{-0.5t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t-t-1-\frac{1}{2}\cos t+\frac{1}{2}\sin t$, $c_1,c_2\in\mathbf{R}$.

ד. $\ddot{y}-2\dot{y}+y=t^2\cos t+1$. אין רזוננס.

ה. $y^{(5)}-y^{(4)}=t+t^3e^t$. $p(\lambda)=\lambda^5-\lambda^4=\lambda^4(\lambda-1), \lambda_{1,2,3,4,5}=0,1$, יש רזוננס עם ריבוי 1 לשורש $\lambda=1$ ועם ריבוי 4 לשורש $\lambda=0$.

ו. $y^{(4)}-16y=t+\cos 2t-\tan t$.
$p(\lambda)=\lambda^4-16=(\lambda^2-4)(\lambda^2+4), \lambda_{1,2,3,4}=\pm 2,\pm 2i$. יש רזוננס עם ריבוי 1 לשורש $\lambda=2i$ או, שזה אותו דבר מעל $\mathbf{R}$, לשורש $\lambda=-2i$.

ז. $\ddot{y}-8\dot{y}+20y=e^{2t}\sin 2t+t^2e^{4t}\cos 2t-e^{4t}\sin 2t$.
$p(\lambda)=\lambda^2-8\lambda+20, \lambda_{1,2}=4\pm 2i$, יש רזוננס עם ריבוי 1 לשורש $\lambda=4+2i$ או, שזה אותו דבר מעל $\mathbf{R}$, לשורש $\lambda=4-2i$.

ח. $\ddot{y}-6\dot{y}+10y=\frac{1}{t}e^{3t}\sin t+e^{3t}-t\sin t$. $p(\lambda)=\lambda^2-6\lambda+10, \lambda_{1,2}=3\pm i$, אין רזוננס ($\frac{1}{t}e^{3t}\sin t$ לא קוווזי-פולינום).

ט. תוספת (לא היה בשיעור הבית, ולכן לא לבדיקה) $y^{(4)}+8y''+16y=t^7\cos 2t$,
$p(\lambda)=\lambda^4+8\lambda^2+16=(\lambda^2+4)^2, \lambda_{1,2,3,4}=\pm 2i$, יש רזוננס עם ריבוי 2 לשורש $\lambda=2i$ או, שזה אותו דבר מעל $\mathbf{R}$, לשורש $\lambda=-2i$ . .