משפט 6 (Isidori ~1983)

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases}$$

מקרה אוטונומי
אז $x = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ t \end{pmatrix}$, $f = \begin{pmatrix} \bar{f} \\ 1 \end{pmatrix}$
$g = \begin{pmatrix} \bar{g} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\dot{t} = 1$, $t = x_{n+1}$

$x \in \mathbb{R}^n$ אז $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$

אם $r =$ rel. degree ב x_0 אזי

1. $r \leq n$

2. בסביבת נק' x_0 קיימים קואורדינטות לוקליות

$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r, \xi_1, \ldots, \xi_{n-r}$
$\mu_1 = y,\ \mu_2 = \dot{y},\ \ldots,\ \mu_r = y^{(r-1)}$

שבהן המערכת מקבלת את הצורה

$$\left[\begin{array}{l} \dot{\mu}_1 = \mu_2 \\ \ldots \\ \dot{\mu}_{r-1} = \mu_r \\ \dot{\mu}_r = \alpha(\mu, \xi, t) + \beta(\mu, \xi, t) u \\ \dot{\xi} = \Psi(\mu, \xi, t) \\ \dot{t} = 1 \end{array}\right.$$

$(\mu_1^{(r)} = \alpha + \beta u)$

$\beta \neq 0$, במקרה לא אוטונומי
(לא מתאפס בסביבה)

$\dot{\xi} = \Psi(\mu, \xi, t) \longrightarrow$ אין בקר!!

הוכחה:

ברור ש
$\mu_1 = y = h$
$\mu_2 = L_f h, \ldots, \mu_r = L_f^r h$

59

1. נוכיח $\nabla t, \nabla \mu_1, \dots, \nabla \mu_r$ בלתי תלויים לינארית

במקרה אוטונומי: $\nabla \mu_1 \dots \nabla \mu_r$

אז גם נקבל $r \le n$

דרך שלילה! נניח

מקרה לא אוטונומי

$$\lambda_0 \nabla t + \lambda_1 \nabla \mu_1 + \dots + \lambda_r \nabla \mu_r = 0$$

בנקודה

נכפול ב g מימין

$$\lambda_0 L_g t + \lambda_1 L_g \mu_1 + \dots + \lambda_r L_g \mu_r = 0$$

$$+\lambda_2 L_g \mu_2$$

$$0 = \lambda_2 L_g L_f \mu_1$$

$$L_g L_f^{r-1} \mu_1 \neq 0$$

$$\Leftarrow \lambda_r = 0$$

אחר כך נכפול ב $ad_f g, \dots$

$$(ad_f^k g) \nabla \mu_s = L_{ad_f^k g} L_f^{s-1} \mu_1 = (-1)^k L_g L_f^{k+s-1} \mu_1 + \sum_{i=1}^{k} c_i L_f^i L_g L_f^{k-i+s-1} \mu_1$$

$=0 \quad k+s<r$

$\neq 0 \quad k+s=r$

$k+s \le r$

0

כך נקבל אחרי הרבה צעדים ש $\lambda_r = \lambda_{r-1} = \dots = \lambda_1 = 0$

אז נקבל $\lambda_0 \nabla t = 0 \Rightarrow \lambda_0 = 0$ $\boxed{\text{סיום}}$

(במקרה לא אוטונומי)

2. נסמן את הקואורדינטות

$\text{Span}\{g\}$ involutive כי $[g,g]=0$, לכן, לפי

Frobenius

$\Leftarrow$ יש פונקציות $\eta_1(x), \dots, \eta_n(x)$

(מקרה אוטונומי: $\eta_1(x), \dots, \eta_{n-1}(x)$)

1. $L_g \eta_1 = L_g \eta_2 = \dots = L_g \eta_n = 0$

2. בלתי תלויים $\nabla \eta_1, \dots, \nabla \eta_n$

מקיים את אינוולוטיבי

אם

$$\nabla \eta_1, \dots, \nabla \eta_n \perp g$$

מצד שני

$$\underbrace{\nabla t, \nabla \mu_1, \dots, \nabla \mu_{r-1} \perp g}$$

$$\nabla \mu_{r} g = L_g L_f^{r-1} \mu_1 \neq 0$$

$$\hookrightarrow L_g L_f^{k} \mu_1 = 0, \quad k = 0, 1, \dots, r-2, \quad \nabla t\, g = (0,1)\begin{pmatrix} g \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{rank} \left[\underbrace{\nabla t, \nabla \mu_1, \dots, \underbrace{\nabla \mu_r, \nabla \eta_1, \dots, \nabla \eta_n}_{\text{בלתי תלויים}}}_{\text{בלתי תלויים}} \right] = n+1$$

$\Rightarrow$ קיימים $\nabla \eta_{i_1}, \dots, \nabla \eta_{i_{n-r}}$

$$\mathrm{rank} \left[\nabla t, \nabla \mu_1, \dots, \nabla \mu_r, \nabla \eta_{i_1}, \dots, \nabla \eta_{i_{n-r}} \right] = n+1$$

מרכיבות כך, ישאר עם מטריצה

נגדיר $\xi_1 = \eta_{i_1}, \dots, \xi_{n-r} = \eta_{i_{n-r}}$

$$\dot{\eta}_{i_j} = \dot{\xi}_j = L_f \eta_{i_j} + \underbrace{L_g \eta_{i_j}}_{=0} u = L_f \eta_{i_j}, \quad j = 1, \dots, n-r$$

$$L_g \eta_{i_j} = \nabla \eta_{i_j} g = 0$$

פתרונות בגלל ש-$\{g\}$ אינוולוטיבית

מ.ש.ל.

<u>מסקנה:</u> מערכת Feedback linearizable (state-input, state-feedback) $\Leftrightarrow$ קיימת פונקציה $h(x)$ ~~בעלת~~ בעלת סדר יחסי <u>n</u>

<u>דוגמא:</u> Robot

$$\begin{cases} I \ddot{q}_1 + MgL \cos q_1 + k(q_1 - q_2) = 0 \\ J \ddot{q}_2 - k(q_1 - q_2) = u \end{cases}$$

$$h = q_1 \Rightarrow r = 4 = n$$

!נכון

60

$$\left.\begin{aligned} \ddot{q}_1 &= \dots + \frac{K}{I} q_2 \\ \ddot{q}_2 &= \dots + \frac{1}{J} u \end{aligned}\right| \Rightarrow q_1^{IV} = \dots + \frac{K}{IJ} u$$

לא נכון

$$\cancel{\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ 2x_1x_2 + \sin x_2 \\ 2x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{2x_2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} u}$$

Zero dynamics

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u & x = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \xi \end{pmatrix} \text{ בהצגה} \\ y = h(x) & r - \text{rel. degree} \end{cases}$$

zero dynamics זאת הדינמיקה $y \equiv 0$

$$0 = y^{(r)} = \alpha(x) + \beta(x)u \Rightarrow u_{eq} = -\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$$

בקואורדינטות x_0 שבחרנו מקיימים

$$y \equiv 0. \quad \boxed{\begin{gathered} \mu_1 \equiv \mu_2 \equiv \dots \equiv \mu_r \equiv 0 \\ \dot{\xi} = \Psi(0, \xi, t) \end{gathered}} \quad \text{zero dynamics}$$

u_{eq} נקרא equivalent control

כמו מצוטט ב-SMC (Sliding Mode Control)

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u_{eq}(x) \\ y = h(x) \equiv 0 \end{cases} \quad \text{Zero dynamics}$$

<u>הגדרה</u> המערכת נקראת minimum-phase

אם Zero-dynamics יציבה אסימפטוטית

$\dot{\xi} = \Psi(0, \xi, t)$ זאת אומרת

יציבה אם לגבי נק' איזון מסויימת $\xi = 0$ | כמובן

תמיד אפשר להביא ξ גדול

משפט.

מקרה אוטונומי

(נת) $\dot{x} = f(x) + g(x)u$

$y = h(x)$

אם המערכת מינימום פאזי אז

$$u = u_{eq}(x) + \frac{1}{\beta(x)}\left(-\gamma_1\mu_1 - \dots - \gamma_r\mu_r\right)$$

מייצבת לוקלית את המערכת

אם ~~[illegible]~~ $\lambda^r + \gamma_r\lambda^{r-1} + \gamma_{r-1}\lambda^{r-2} + \dots + \gamma_1$ Hurwitz ([illegible])

הוכחה: לינאריזציה

$$\begin{pmatrix}\mu \\ \xi\end{pmatrix}^{\circ} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_1' & A_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mu \\ \xi\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ o(\|\mu\| + \|\xi\|)\end{pmatrix}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & \\ -\gamma_1 & \cdots \ -\gamma_r \end{pmatrix}$$ — A_1, A_2 [illegible]

המשפט נכון גם כאשר A_2 לא Hurwitz

ב-Isidori "Central Manifold Theorem"

הערה: אם מייצבים תוך זמן סופי אז המשפט נכון גם במקרה לא אוטונומי!
(זכור מה שעשינו)

דוגמא לייצב את

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^4 x_2 \\ \dot{x}_2 = \sin x_2 + u \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_1^4 x_2 \\ \sin x_2 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1, $f=\begin{pmatrix} x_1^4 x_2 \\ \sin x_2 \end{pmatrix}$, $g=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ נחפש feedback linearization

$$ad_f g = [f,g] = \nabla g \cdot f - \nabla f \cdot g =$$

$$= 0 - \begin{pmatrix} 4x_1^3 x_2, & x_1^4 \\ 0, & \cos x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x_1^4 \\ \cos x_2 \end{pmatrix}$$

$\nabla \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla f_1 \\ \nabla f_2 \end{pmatrix}$

$$\text{rank}\,[g, ad_f g] = \text{rank}\begin{bmatrix} 0 & x_1^4 \\ 1 & \cos x_2 \end{bmatrix} = 2 \iff x_1 \neq 0$$

involutivity span{g}

⇐ אין לינאריזציה ~~גלובלית~~ מלאה ב-0,

אם נחפש פלט אחר את הפלט z

כדי rel. degree 2 אז ש $L_g z = 0$

לכן $\frac{\partial z}{\partial x_2} = 0 \Leftarrow z = z(x_1)$, $\nabla z \neq 0$ ב-0

$\Rightarrow \underset{\text{נבחר}}{z = x_1}$ $z = \mu_1$, $\mu_2 = \dot z = \cancel{\ldots}\, z'(x_1) \cdot x_1^4 x_2$

$$\dot\mu_2 = \ldots + \underbrace{z'(x_1)\, x_1^4}_{\neq 0} \cancel{\sin x_2}\, u$$

מתאפס ב $x=0$

⇐ אין rel. degree

2, אילו היה $x_2 = -x_1$ היינו מקבלים

$$\dot x_1 = -x_1^5 \Rightarrow x_1 \to 0, \; x_2 = -x_1 \to 0$$

⇐ בואו נכפה $x_1 + x_2 = 0$

$\sigma = x_1 + x_2$ גלישה

$$\dot\sigma = (x_1 + x_2)^{\cdot} = x_1^4 x_2 + \sin x_2 + u, \quad r=1$$

$$u = \underbrace{-\sin x_2 - x_1^4 x_2}_{u_{eq}} + \underbrace{(-x_1 - x_2)}_{-\sigma}$$ גלישה

⇐ לכן $\dot\sigma = -\sigma$, $\sigma \to 0$

נבדוק Zero-dynamics

$$x_1 + x_2 = 0, \; \dot x_1 + \dot x_2 = 0$$

$$\dot x_2 = -\dot x_1 = -x_1^4 x_2 = -x_2^5 \Rightarrow x_2 \to 0$$

יציבה,

יציבות אסימפטוטית ⇐ מש"ל $\boxed{\mu_1 = \sigma = x_1 + x_2, \; \xi = x_1}$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = tg\, x_2 - u \\ \dot{x}_2 = u, \quad y = x_1 \end{cases}$$ פלט

היעד: $x_1 = 0$ (Output regulation)

Zero dynamics: $r=1$, $u_{eq} = tg\, X_2$

$u = u_{eq} = tg\, X_2 \Rightarrow \dot{x}_2 = tg\, x_2 \quad \leftarrow \bullet \rightarrow X_2$

! non-minimum phase

אין יציבות!

התבדרות

האם הבעיה בלתי פתירה??

נגדיר $Z_1 = X_1 + X_2$ אז

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = tg\, X_2 - u + u = tg\, X_2 \overset{def}{=} z_2 \\ \dot{z}_2 = \dfrac{1}{\cos^2 X_2} u \Rightarrow r = 2 \end{cases}$$ לוקלית

Feedback linearization $\Leftarrow$

$u_{eq} = 0$

$$u = \cos^2 X_2 (-\gamma_1 Z_1 - \gamma_2 \underset{\dot{z}_1}{\underset{\|}{Z_2}}) = \cos^2 X_2 (-\gamma_1 (X_1 + X_2) - \gamma_2\, tg\, X_2)$$

$\ddot{z}_1 = \dot{z}_2 = -\gamma_1 z_1 - \gamma_2 z_2 \qquad \gamma_1, \gamma_2 > 0$ כלשהם

$\ddot{z}_1 + \gamma_2 \dot{z}_1 + \gamma_1 z_1 = 0 \qquad z_1, \dot{z}_1 = z_2 \to 0$

$\Rightarrow X_1 + X_2,\ tg\, X_2 \to 0 \Rightarrow x_1 \to 0,\ x_2 \to 0$

אז קיבלנו גם $X_1 = 0$

אין פה סתירה; יש רק פתרון אחד גם

ל-zero dynamics המקורית ($X_1 \equiv 0$)

$X_2 \equiv 0 \Rightarrow \dot{X}_2 = tg\, X_2$!

בעיות במקרה non-minimum phase

הכי קשים

65

MIMO case (multi input - multi output)

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$, במקרה לא אוטונומי, $x = (\bar{x}, t)^T$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = y = h(x) = \begin{pmatrix} h_1(x) \\ \vdots \\ h_m(x) \end{pmatrix}, \quad g(x)u = \sum_{i=1}^{m} g_i(x) u_i$$

$$g(x) = (g_1\ g_2 \ldots g_m)$$

מטריצה

מערכת ריבועית

$$\dim y = \dim u$$

<u>הגדרה:</u> וקטור relative degree

$$r = (r_1, r_2, \ldots, r_m) \in \mathbb{N}^m$$

1. $$L_{g_j} L_f^k h_i = 0 \qquad k = 0, 1, \ldots, r_i - 2, \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$\exists j:\ L_{g_j} L_f^{r_i - 1} h_i \neq 0$$

לא אפס כולו

2. מקבלים

$$\begin{pmatrix} y_1^{(r_1)} \\ \vdots \\ y_m^{(r_m)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_f^{r_1} h_1 \\ \vdots \\ L_f^{r_m} h_m \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} L_{g_1} L_f^{r_1 - 1} h_1, \ldots, L_{g_m} L_f^{r_1 - 1} h_1 \\ \vdots \\ L_{g_1} L_f^{r_m - 1} h_m, \ldots, L_{g_m} L_f^{r_m - 1} h_m \end{pmatrix}}_{G = \beta(x)} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}$$

$$\det G(x) \neq 0$$

לא מאפס!!

G נקרא high-frequency gain matrix

<u>מקבלים!</u>

$$\mu_{11}, \mu_{12}, \ldots, \mu_{1r_1} \qquad \dot{\mu}_{ik} = \mu_{i,k+1}$$

$$\vdots$$

$$\mu_{m1}, \mu_{m2}, \ldots, \mu_{mr_m}$$

$$\begin{pmatrix} \mu_{1r_1} \\ \vdots \\ \mu_{mr_m} \end{pmatrix}^{\cdot} = \alpha(\cancel{x}) + \beta(\cancel{x})u \xrightarrow{} (\mu, \xi), \qquad \dot{\xi} = \psi(\cancel{x}, \mu, \xi, t) + \varphi(\mu, \xi, t)u$$

$r = (r_1, r_2, \ldots, r_m)$

Total relative degree $\quad r_1 + r_2 + \ldots + r_m$ $\qquad$ <u>הגדרה</u>

MIMO Feedback Linearization $\qquad$ <u>משפט</u>

$$\dot{x} = f(x) + g_1(x)u_1 + g_2(x)u_2 + \ldots + g_m(x)u_m \quad , \ \text{rank}\, g = m$$

Feedback linearization:

החלפת קואורדינטות

$$\dot{z}_{1,1} = z_{1,2}, \ldots, \dot{z}_{1,r_1-1} = z_{1,r_1}$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad r_1 + r_2 + \ldots + r_m = n$$

$$\dot{z}_{m,1} = z_{m,2}, \ldots, \dot{z}_{m,r_m-1} = z_{m,r_m}$$

$$\begin{pmatrix} z_{1,1}^{(r_1)} = \dot{z}_{1,r_1} \\ \vdots \\ z_{m,1}^{(r_m)} = \dot{z}_{m,r_m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(z,t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta(z,t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}$$

מקרה לא אוטונומי $\qquad \det \beta \neq 0$

קיימים פלטים $\iff$ Feedback Linearization $\Longleftarrow$

$z_{11} = h_1, \ldots, z_{m1} = h_m$

rel. degree $h = (r_1, \ldots, r_m) : r_1 + \ldots + r_m = n$

[illegible]

Feedback linearizability $\iff$ (Isidori '85) <u>משפט</u>

$$G_1 = \text{span}\{g_1, \ldots, g_m\}$$

$$G_2 = \text{span}\{g_1, \ldots, g_m, ad_f g_1, \ldots, ad_f g_m\}$$

$$\vdots$$

$$G_n = \text{span}\{g_1, \ldots, g_m, \ldots, ad_f^{n-1} g_1, \ldots, ad_f^{n-1} g_m\}$$

1. (rank=const) nonsingular $\quad i = 1, \ldots, n \quad G_i$
2. involutive $\quad i = 1, \ldots, n-1 \quad G_i$
3. $\text{rank}\, G_n = n$

במקרה של relative degree
יש לנו המוגן צורה נורמלית
אבל היא פחות מעניינת:

$$\begin{pmatrix} h_1^{(r_1)} \\ \vdots \\ h_m^{(r_m)} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} L_f^{r_1} h_1 \\ \vdots \\ L_f^{r_m} h_m \end{pmatrix}}_{\alpha(\mu,\xi,t)} + \underbrace{\begin{pmatrix} L_{g_1} L_f^{r_1-1} h_1 \dots L_{g_m} L_f^{r_1-1} h_1 \\ \dots \\ L_{g_m} L_f^{r_m-1} h_m \dots L_{g_m} L_f^{r_m-1} h_m \end{pmatrix}}_{\beta(\mu,\xi,t)} u$$

$\mu = (\mu_{11}, \dots \mu_{1 r_1}, \dots \mu_{m1} \dots \mu_{m r_m})$

$\xi = \xi_1, \dots \xi_{n-r_1-r_2-\dots-r_m}$

$$\dot{\xi} = \psi(\mu,\xi,t) + \varphi(\mu,\xi,t)\, u$$

במקרה כללי אי אפשר לבחור ξ כך ש $\varphi \equiv 0$
זה אפשר אם הגורם $\mathrm{span}\{g_1 \dots g_m\}$ involutive

הוכחה ספר Isidori: של ספר (מסובכת)
Frobenius

$R_{n-k_1-k_2} < R_{n-k_1-k_1} = R_{n-k_1-k_1}$

$R_{n-k_1} = \mathrm{rank}\, G_{k_1} \geq n \Rightarrow n-k_1 \quad z_{1,1}, \dots, z_{1,n-k_1}$

$R_{n-1} = \mathrm{rank}\, G_{n-1} = n \qquad z_{1,1}^{(n-k_1-1)} \dots z_{1,n-k_1}^{(n-k_1-1)}$

$R_n = \mathrm{rank}\, G_n = n$

קואורד' כלליות
הגדולה
מגיעים עוד
k_2 בשביל מקבלים $n-k_1-k_2$, ... עד t
נגיע לצורה
בצורה כללית, בצורת Jordan form

$B = [b_1 \dots b_m] \quad X \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, \quad \dot{X} = AX + Bu$ Kalman!

$G_1 = \mathrm{span}[b_1 \dots b_n]$, $G_2 = \mathrm{span}[b_1 \dots b_n, Ab_1 \dots Ab_n]$, $G_{n-1} = \mathrm{span}\{b_1 \dots b_n, A^{n-2} b_1 \dots A^{n-2} b_n\}$

$G_n = \mathrm{span}\{b_1 \dots b_n, \dots A^{n-1} b_1 \dots A^{n-1} b_n\}$, $\mathrm{rank}\, G_n = \mathrm{rank}\, [B, AB, \dots, A^{n-1} B]$

בקרה, במצבי אי וודאות

דוגמא

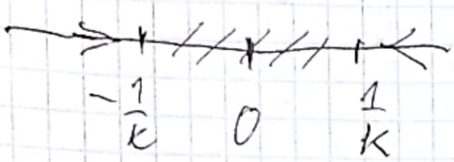
$\dot{x} = a(t,x) + u, \quad x,u \in \mathbb{R}$

היעד: ייצוב x: $x \to 0$

פתרון: $u = -a(t,x) - x$, $\dot{x} = -x$, $x \to 0$

מה לעשות אם $a(t,x)$ לא ידוע? נניח $|a| \le 1$

1. High gain control $u = -kx$, $k \gg 1$



$\dot{x} = a - kx = -k(x - \frac{a}{k})$

מתכנס ~~[illegible]~~ $|x| \le \frac{1}{k}$, $t \to \infty$

בנוסף: $\ddot{x} = \dot{a} - k\dot{x} \Rightarrow |\dot{x}| \le \frac{\sup|\dot{a}|}{k}$

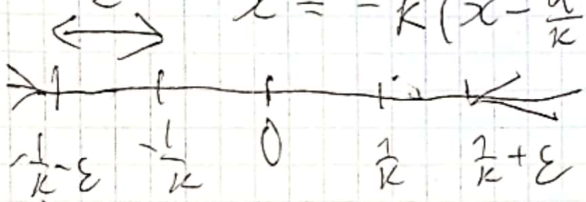
כל מספר k!

חסרון: נניח x נמדד עם רעש

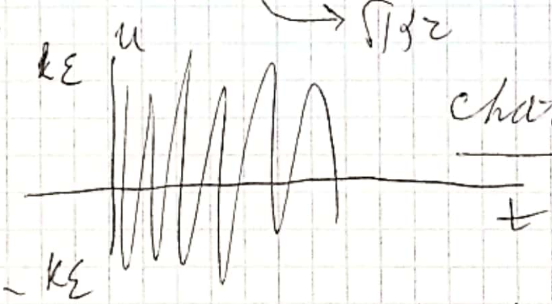
$\hat{x} = x(t) + \eta(t)$, $|\eta(t)| \le \varepsilon$

$u = -k(x + \eta(t)) \Rightarrow \dot{x} = a - kx - k\eta$

$\dot{x} = -k(x - \frac{a}{k} + \eta)$, $|x| \le \frac{1}{k} + \varepsilon$, $\ddot{x} = \dot{a} - k\dot{x} - k\dot{\eta} = \pm\infty$!!



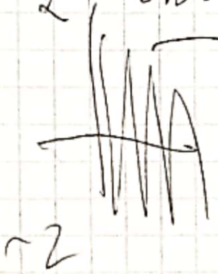
גם הבקרה מגיעה ל $k\eta \in [-k\varepsilon, k\varepsilon]$ → גדול



chattering

Saturation ⇐

2. chattering

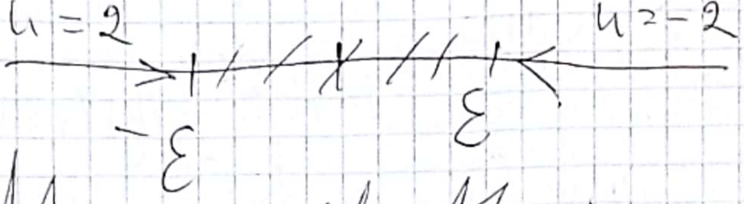


$$u = \begin{cases} -2\,\mathrm{sign}\,\hat{x}, & |\hat{x}| > \frac{2}{k} \\ -k\hat{x}, & |\hat{x}| \le \frac{2}{k} \end{cases}$$

$u = -2\,\text{sign}\,\hat{x}$, $u = -2\,\text{sign}\,x$ .2 69

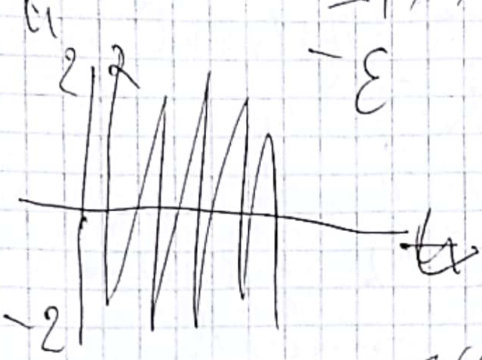
עם רעש

$$\dot{x} = a - 2\,\text{sign}(x+Z)$$



$|x| \le \varepsilon$

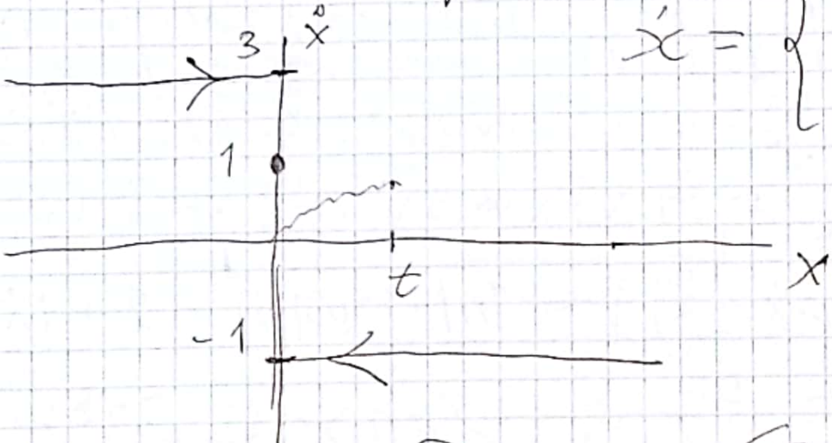
בזמן סופי



chattering

דוגמה: נניח $a(t,x) \equiv 1$

$$\dot{x} = 1 - 2\,\text{sign}\,x \qquad \dot{x} = \begin{cases} -1 & x>0 \\ 1 & x=0 \\ 3 & x<0 \end{cases}$$



$x(0)=0 \Leftarrow$ חייבים לצאת כי $\dot{x}=1$

אבל לא יכולים לצאת ימינה כי שם $\dot{x}=-1$

הנגזרת

[illegible]

$$x(t) = \underset{=0}{x(0)} + \underset{=1}{\dot{x}(0)} \cdot t + o(t)$$

לכל t קטן מספיק,

$\Leftarrow$ לכל t קטן מספיק $x(t) > 0$

$\Leftarrow \exists\, t_0 \in (0,t)$ כך ש $\dot{x}(t_0) = \frac{x(t)}{t} > 0$

אבל $\dot{x}(t_0) = -1$ סתירה,

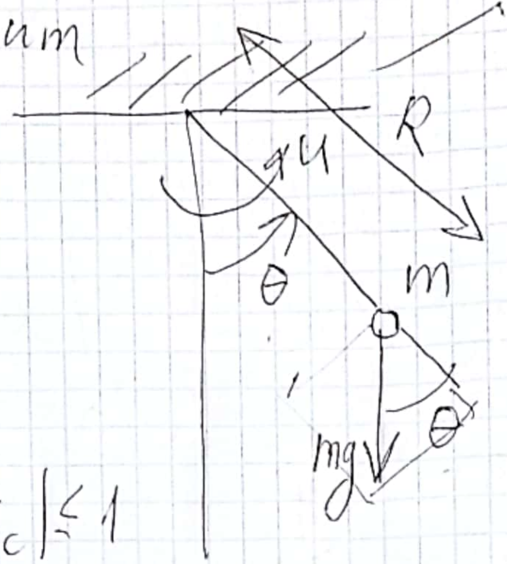
$\xrightarrow{\text{Cauchy}}$ לגרנג'

אין פתרון

[illegible]

דוגמא מטוטל

Pendulum



u-מומנט [illegible]

$$mR^2\ddot\theta = mgR\sin\theta \underbrace{-k\dot\theta}_{\text{חיכוך}} + u$$

$|\dot x_c|, |\ddot x_c| \le 1$

רצוי: $\theta = \theta_c(t)$ ← command

נניח $x, \dot x, x_c, \dot x_c, \ddot x_c$ נמדדים

$$\ddot x = A\sin x - B\dot x + ku$$

מקדמים (סימונים חלקיים) אך נכון [illegible] [illegible] [illegible] $\ddot x = \tilde u$

נכון

נניח אין מידע על A, B, k, רק $|A|, |B| \le 1$, $1 \le k \le 2$

נגדיר $\sigma = x - x_c(t)$

$$\ddot\sigma = (x - x_c)'' = \underbrace{A\sin x - B\dot x - \ddot x_c} + ku$$

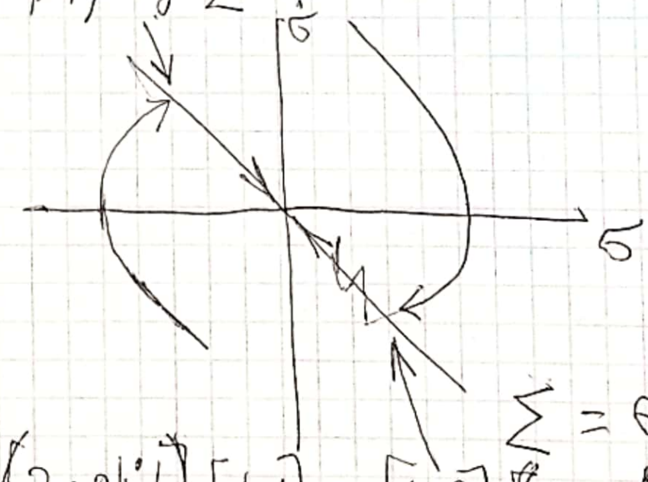
$$|A\sin x - B\dot x - \ddot x_c| \le |A| + 1 + |B||\dot x| \le 2 + |\dot x|$$

נגדיר $\Sigma = \dot\sigma + \sigma$, $\Sigma = 0 \Rightarrow \sigma, \dot\sigma \to 0$

$$\dot\Sigma = \ddot\sigma + \dot x - \dot x_c = \underbrace{A\sin x - B\dot x - \ddot x_c + \dot x - \dot x_c}_{\le \text{ בערך מוחלט}} + ku$$

$2 + |\dot x| + |\dot x| + 1 = 3 + 2|\dot x|$

נבחר $u = -(4 + 2|\dot x|)\,\mathrm{sign}\,\Sigma$



$\sigma, \dot\sigma \to 0$

$\Sigma \to 0$

$\Sigma = \dot\sigma + \sigma = 0$

$$\dot\Sigma \in (3 + 2|\dot x|)[-1, 1] - [1, 2](4 + 2|\dot x|)\,\mathrm{sign}\,\Sigma$$

אין לנו ~~דיוק~~ להגדיר את זה

נניח שיש השהיה, איחור τ switching delay

$t \geq \delta$ $\quad |\dot{\Sigma}| \leq L \Rightarrow |\Sigma| \leq L\tau \quad \Leftarrow$

$|\dot{x}| \leq 1 \Rightarrow L = 5 + 2 \cdot 6 = 17 \leq 20$

$\Rightarrow |\Sigma| \leq L\tau \qquad \dot{\sigma} + \sigma = \varepsilon(t) \in L\tau[-1,1]$

$$\sigma = \sigma(0)e^{-t} + \int_0^t e^{-(t-s)}\varepsilon(s)\,ds$$

$$= \sigma(0)e^{-t} + \underbrace{e^{-t}\int_0^t e^{s}\varepsilon(s)\,ds}_{\omega(t)}$$

$$|\omega(t)| \leq L\tau e^{-t}\int_0^t e^{s}\,ds = L\tau e^{-t}(e^{t}-1) = L\tau(1-e^{-t}) \leq L\tau$$

$$\sigma(t) - \sigma(0)e^{-t} \in L\tau[-1,1], \ \tau \to 0 \ \ldots$$

זה מה שעשו ב 1950-60

בעיות הגדרה

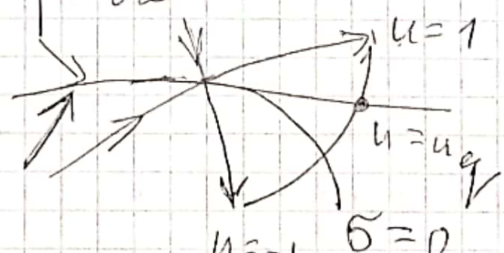
1. Equivalent control

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$
$$\dot{x} = v(x,u)$$

$u = -\operatorname{sign}\sigma, \quad \sigma \equiv 0$

$\dot{\sigma} = \frac{\partial\sigma}{\partial x}\cdot v = 0$

$$\begin{cases} \dot{x} = v(x, u_{eq}) \\ \sigma(x) \equiv 0 \end{cases} \Leftarrow \frac{\partial\sigma}{\partial x}(x)\,v(x,u) = 0 \Rightarrow u = u_{eq}$$



2. Izosimov ~1976

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\operatorname{sign} x_1 \\ \dot{x}_2 = -\operatorname{sign} x_2 \\ \dot{x}_3 = \operatorname{sign} x_1 \cdot \operatorname{sign} x_2 \end{cases}$$

3 צעדי מעבר,

שליים ⇐ מעורה

ב x_3 אפשרי

בכלל כיוון!