הרצאה 5

הקדמה בהגנאי אי-ליניאריות

פנדמייה: Corona Virus, Covid-19, Wuhan Virus

נסתכל במדינה אחת קטנה

P – אוכלוסייה, X – מספר נשאי הנגיף

Z – אנשים שהחלימו

C (cost) – עושר חברתי

d – מרחק חברתי social distancing

$$\begin{cases} \dot{P} = -\underbrace{\mu X}_{\text{mortality}} + \alpha_1 C \cancel{P} + \underbrace{I(t)}_{\text{Immigration}} - \underbrace{E(t)}_{\text{Emigration}} \\ \dot{X} = \frac{\alpha_2}{d}(P-X-Z)X - \underbrace{\mu X}_{\text{מוות}} - \underbrace{\lambda X}_{\text{החלמה}} + \alpha_3 I(t) - \frac{X}{P}E(t) \\ \dot{Z} = \lambda X - \frac{Z}{P}E(t) \\ \dot{C} = -\alpha_4 d + \alpha_5 C - \underbrace{\beta x}_{\text{מחיר הטיפול}} \end{cases}$$

אמינות המודל: מאוד מפוקפק, ~~מצ~~ איכותי בלבד

תחום קיום:

$0 \le X, \cancel{Y}, Z$, $X+Z \le P$

$0 \le Z$, $C \ge 0$, $0 \le I \ll P$, $0 \le E \ll p$

בכל מקום אפשר להחליף X ב- $X^{1.1}$ למשל או $\operatorname{arctg} X$ ...

מטרות: P יעלה, ~~P-X-Z~~ יעלה ($\int \mu X dt$) (מספר מתים)

X – מעט ערך מינימום

בקרה: social distancing

במקום $\frac{1}{d}$ אפשר לקחת פונקציה יורדת אחרת

(39) אפשר לקחת בחשבון קבוצות באוכלוסיה

לפי הגיל ומחלות רקע: $P = P_1 + P_2 + \dots + P_K$

אפשר לקחת בחשבון זמן מחלה,

$X = X_1 + X_2 + \dots + X_{30}$ ...

מכונות הנשמה, מספר יומי בדיקות ...

המקרה הוא עדין d אפשר גם לבנות מסכות

גם לפי חנויות עבודה — $d = (d_1, d_2, \dots, d_e)$

מה מנסים לעשות:

לבנות עצם אמין ולבנות סטרטגיה $d(t)$ יעילה מראש

או עם נקודות ביקורת מסויימות

בלי לדעת את X כמעט אי-אפשר לעשות כלום

יעיל רק שכאשר $d=\infty$ $\dot{X} < 0$ ל- $I \approx (X_m + \lambda)$

היעד: להגיע ל $X=0$ או $X \approx 0$

לכן הפתרון הוא $d=\infty$ כדי להקטין X ואחר-כך ניהול המחלה.

נסיון להגיע לעצם מדוייק נעשה אבל הוא שגוי

בסופו של דבר זה יהיה ניחוש מלומד

מספר מגיע מדויק אבל בגלל אי-התאמת העצם הוא רק מראה על השפעת המקרה כעבור זמן מסויים (≈ 24 ימים!)

אבל X יפול עד לוב אם בדיקות רבות מספיק

סטרטגיה אפשרית:

להחזיק $d \in [d_m, d_M]$, $\dot{X} \le -\lambda_x X$

~~[illegible]~~ בצבור המקרה...

בקרה בתנאי אי-וודאות

Control under Uncertainty conditions

$\boxed{x := X + \lambda_x X}$

בכתב של המרצה

דוגמא

$$\dot{x} = a(t,x) + u$$

$$x, u \in \mathbb{R}$$

$$u = -a(t,x) - x \Rightarrow x \to 0$$

$$u = -a(t,x) - x^{\frac{1}{3}} - x^3$$ עוק כמו / רגות

מה קורה כאשר a לא ידוע?

נניח $|a| \le 1$

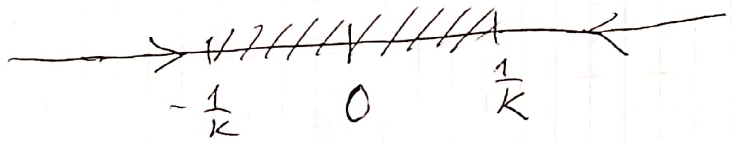
1. **High-gain control**

$$u = -kx, \quad k \gg 1$$

או יותר טוב:

$$u = \begin{cases} -2\,\mathrm{sign}\,x, & |kx| > 2 \\ -kx, & |kx| \le 2 \end{cases}$$

$$|x| \ge \frac{1}{k} \Rightarrow |u| > |a| \Rightarrow \dot{x}x < 0$$



נניח $a(t,x) = a(t)$, כל הנגזרות חסומות

a גזיר לכל t,

$$\dot{x} = a - kx$$

$$\dot{x} = -k\left(x - \frac{1}{k}a\right) \Rightarrow |x| \le \frac{1}{k}$$

$$\ddot{x} = -k\left(\dot{x} - \frac{1}{k}\dot{a}\right) \Rightarrow |\dot{x}| \le \frac{1}{k}\sup|\dot{a}|$$

$$\dots$$

$$\boxed{\left|x^{(j)}\right| \le \frac{1}{k}\sup\left|a^{(j)}\right|}$$

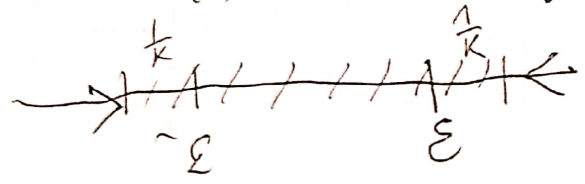
מצוין!!

עכשיו נניח רעש: מוסף $\hat{x} = x(t) + \eta(t)$

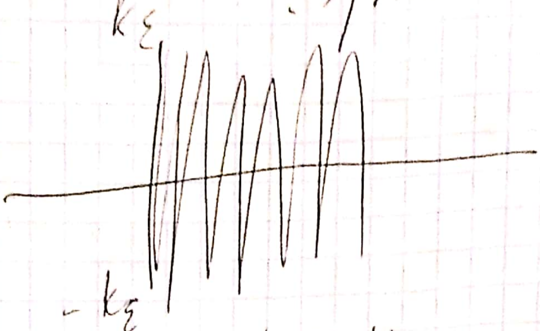
$$|\eta(t)| \le \varepsilon$$

$$\dot{x} = a(t,x) - kx - k\eta(t)$$

$$\Leftarrow \quad |x| \ge \frac{1}{k} + \varepsilon \Rightarrow x\dot{x} < 0$$



הבעיה האמיתית היא הבקר!



$u = -kx - k\eta$

$|k\eta| \le k\varepsilon$

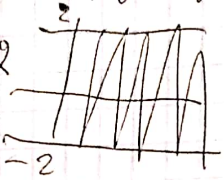
יכול להיות גדול מאוד

אם ישנו סטור גבוה

אז

± 2 ב u של saturation

$$u = \begin{cases} 2\,\mathrm{sign}\,x, & |x| \ge 2 \\ -kx, & |x| < 2 \end{cases}$$



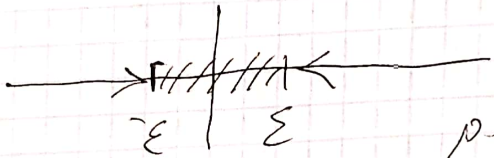
כן נקרא chattering

2. Sliding Mode Control

מצב החלקה

$u = -2\,\mathrm{sign}\,x$

$\dot{x} = a - 2\,\mathrm{sign}(x+\eta)$, $|\eta| \le \varepsilon$



chattering

תמיד קיים בעצם

הבעיה:

$a(t,x) = 1 \Rightarrow \dot{x} = 1 - 2\,\mathrm{sign}\,x$

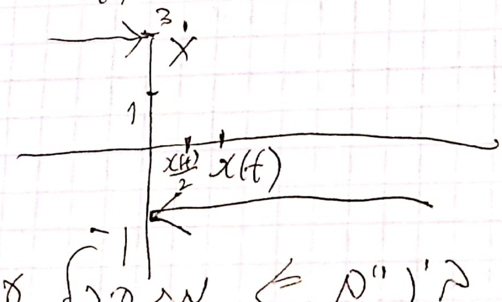
$$\dot{x} = \begin{cases} -1 & x > 0 \\ 1 & x = 0 \\ 3 & x < 0 \end{cases}$$

נניח $x(0) = 0$ ⇐ אין פתרון לבעית Cauchy!

כי נניח שיש, אז

$\dot{x}(0) = 1 \Rightarrow x(t) = 0 + 1 \cdot t + o(t)$, $t \approx 0$

⇐ קיים $t > 0$ כך ש $x(t) > 0$



אבל

אי אפשר להגיע ל $x(t)$ כי $\dot{x} < 0$ כל הערך

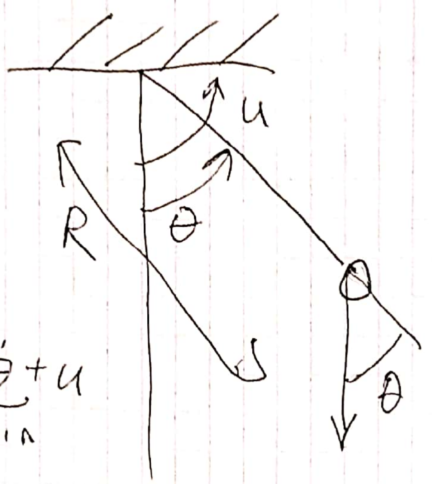
משפט ערך הביניים ⇐ מקבל ערך $\frac{1}{2}x(t)$ בזמן $t_1 < t$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{1}{2}x(t) + \int_{t_1}^{t} \dot{x}(s)\,ds = \frac{1}{2}x(t) - (t - t_1) < x(t)$$

סתירה!

[illegible] של [illegible]

(42) דוגמא מטוטלת Pendulum



היעד

$\theta = \theta_c(t)$

$mR^2\ddot\theta =$

$= -mgR\sin\theta - \underbrace{k\dot\theta}_{\text{חיכוך}} + u$

מקרה מוכלל:

$\ddot x = a(t,x,\dot x) + b(t,x,\dot x)\,u$

$|a| \le 1, \qquad b \in [1,2]$

היעד:

$|\ddot x_c|, |\dot x_c| \le 1 \quad , \sigma = x - x_c \to 0$

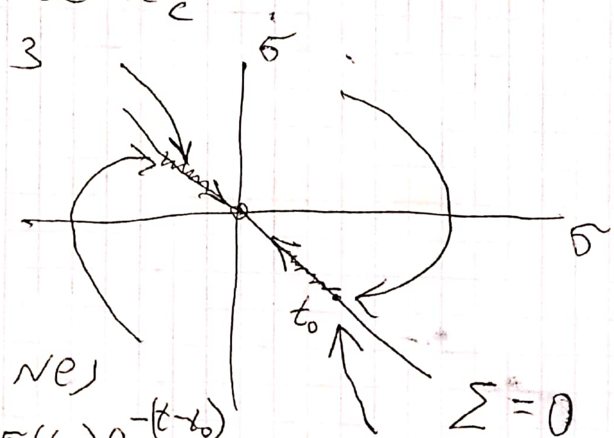
שלב 1

$\Sigma = \sigma + \dot\sigma = (x - x_c) + (\dot x - \dot x_c)$

$\dot\Sigma = a + bu - \ddot x_c + \dot x - \dot x_c$

$|a - \ddot x_c - \dot x_c| \le 3$

$u = -(4 + |\dot x|)\,\text{sign}\,\Sigma$



נשאר ב SM: $\Sigma = 0$

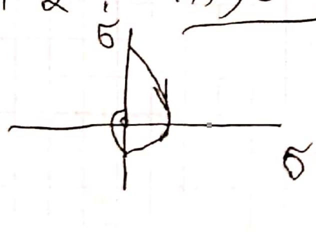
$\Rightarrow \dot\sigma + \sigma = 0 \Rightarrow \sigma = \sigma(t_0)e^{-(t-t_0)}$

$\dot\sigma = \dot\sigma(t_0)\,e^{-(t-t_0)}$

שלב 2 שני:

$\ddot\sigma = a - \ddot x_c + bu, \quad |a - \ddot x_c| \le 2,$

$u = -\cancel{7}\,\text{sign}\,\sigma - \cancel{4}\,\text{sign}\,\dot\sigma$



התכנסות תוך זמן סופי!

בעיית הגדרה

Utkin ~1967 Equivalent control method .1

$$\dot x = v(t,x,u) = f(t,x)+g(t,x)u$$

$$u=\begin{cases} u_+(t,x) & \sigma(t,x)>0 \\ u_-(t,x) & \sigma(t,x)<0 \end{cases}, \quad \sigma, u \in \mathbb{R}$$

נניח $\sigma=0$ נשמר בSM ו $rel.degree=1$

$$\sigma\equiv0 \Rightarrow \dot\sigma\equiv0 \qquad \dot\sigma = \sigma'_t+\sigma'_x f+\sigma'_x g u=0$$

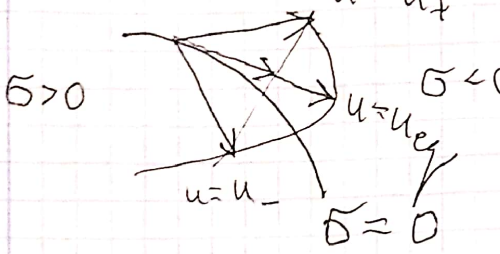
הגדרה $\Leftarrow$ $u_{eq} = -\dfrac{\sigma'_t+\sigma'_x f}{\sigma'_x g}$, $\sigma'_x g\neq0$

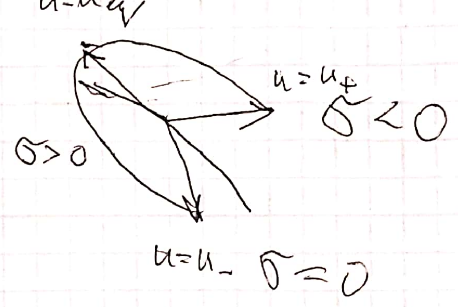
SM motion

$$\begin{cases} \dot x = v(t,x,u_{eq}(t,x)) \\ \sigma(t,x)=0 \end{cases} \quad \text{(zero dynamics)}$$

מקרה כללי:

$\sigma'_t+\sigma'_x v(t,x,u_{eq})=0$





ההגדרה עובדת כאשר המערכת לינארית בu
affine in u

Izosimov, 1976 .2

$$\begin{cases} \dot x_1 = -\text{sign}\, x_1 \\ \dot x_2 = -\text{sign}\, x_2 \\ \dot x_3 = \text{sign}\, x_1 \cdot \text{sign}\, x_2 \end{cases}$$

Euler integration:

$\tilde x_1(t_{k+1}) = x_1(t_k) - \text{sign}\, x_1(t_k)\tau$

$\tilde x_2(t_{k+1}) = x_2(t_k) - \text{sign}\, x_2(t_k)\tau$

$\tilde x_3(t_{k+1}) = x_3(t_k) + \text{sign}\, x_1(t_k)\,\text{sign}\, x_2(t_k)\,\tau$

$x_1, x_2 \to 0$

ונשארים קרובים ל 0

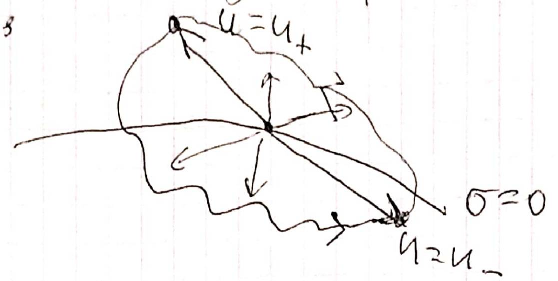
x_3 לך בכל כיוון

אי אפשר לדעת מראש, תלוי בתנאי התחלה

44

דוגמה אחרת: מיתוג רציף
לוקח זמן לעבור מ-u_- ל-u_+, זמן קטן כמובן
ובערך המקר יכול להישאר זמן מה
סביב אילו, ~~א~~ ערך ביניים.

Hysteresis



התנועה
בגלל כיוון
אפשרי

מושגים נדרשים

$x: \mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$

I. פונקציה רציפה בהחלט בקטע $[\alpha,\beta]$

absolutely continuous

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\ \forall n\ \sum_{i=1}^{n}|\Delta t_i|<\delta \Rightarrow \sum|\Delta x_i|<\varepsilon$$

כאשר

$\Delta t_i = t_{i2}-t_{i1},\quad \Delta x_i = x(t_{i2})-x(t_{i1})$

$[t_{i1},t_{i2}]\subset[\alpha,\beta]$, $i=1,\dots,n$

$i\neq j \Rightarrow [t_{i1},t_{i2}]\cap[t_{j1},t_{j2}]=\emptyset$

פונקציה רציפה בהחלט גזירה ⇐ קיים קטע
סגור וקומפ,

תכונות:

1. $x(t)$ ליפשיצית ⇐ רציפה בהחלט

Lipshitz, ליפשיץ: $\|x(t_1)-x(t_2)\|\le L|t_1-t_2|$

הוכחה:

$$\sum|\Delta x_i|\le L\sum|\Delta t_i|\le L\delta$$

2. כל פונקציות אלמנטריות (כמעט) ליפשיציות
ולא אופן! $|t|^\alpha$, $0<\alpha<1$ ב-$t=0$

3. f_1, f_2 רציפות בהחלט (סקלריות) ⇐
$f_1+f_2;\ f_1(f_2);\ f_1 f_2;\ f_1/f_2,\ f_2\neq 0$
גם רציפות בה.חלט

(45)

II ס׳ אלגברה (עם יחידה)

באות מערכת קבוצות Σ

$$A_i \in \Sigma \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Sigma$$

$$A \in \Sigma \Rightarrow \neg A \in \Sigma, \quad \emptyset \in \Sigma$$

$$\Rightarrow \bigcap_i A_i = \neg\left(\bigcup_i \neg A_i\right) \in \Sigma$$

$A \cup \neg A = E$ יחידה, $E \in \Sigma$

III מידה measure

$$\mu: \Sigma \to R$$

$$\mu(\emptyset)=0, \ \forall A_i, \mu(A) \geq 0$$

אם $A_i \cap A_j = \emptyset$ $\forall i \neq j$

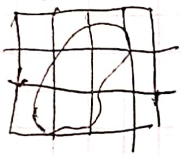
$$\mu\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i \mu(A_i)$$

Σ-אלגברה, של קבוצות סגורות ב R^n (=פתוחות)

נקראת אלגברה Borel, $E = R^n$

מידה ב Borel קבוצות – אורך (נפח)

$$\mu(R^n) = \infty$$



חלוקה של R^n לריבועים קטנים

מידה: נפח

IV הגדרת לבג Lebesgue

G מדידה measurable

$\mu^*(G) = \inf_{G \subset A} \mu(A)$ מידה חיצונית, $\mu_*(G) = \sup_{A \subset G} \mu(A)$ פנימית

$$\mu(G) \overset{def}{=} \boxed{\mu_*(G) = \mu^*(G) \text{ כאשר מתקיים}}$$

(Jordan)

הגדרה!

קבוצת Vitali: R/Q נציג אחד מכל מנה

היא לא מדידה,

Banach Tarski!
1924

$B \subset R^3$ ball כדור $\rightarrow$ {מספר סופי של תת קבוצות} $\rightarrow B_1 \cup B_2$

[illegible] קיימת

שני כדורים מאותו נפח

V פונקציה מדידה לפי Lebesgue

(46)

$f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

מקור של כל קבוצה מדידה לפי Borel
הוא קבוצה מדידה לפי Lebesgue

הגדרה סימבולית:

Lebesgue $\to$ Borel

דוגמאות:

$\mathbb{Q}, \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$

מידה 0: $\mu(\mathbb{Q}) = \mu(\mathbb{Z}) = 0$

קו $\subset \mathbb{R}^n$ גם כן

כל פונקציה אלמנטרית היא מדידה לפי Lebesgue

פונקציה מדידה לפי Borel:

לפי Borel: Borel $\to$ Borel

פונקציה מדידה לפי בורל תמיד מדידה
לפי לבג.

$f_1(f_2)$ $\quad \mathbb{R}^m \xrightarrow{f_2} \mathbb{R}^k \xrightarrow{f_1} \mathbb{R}^n$

מדידה לפי Lebesgue $\quad$ Lebesgue $\quad$ Borel

מדידה לפי בורל $\quad \mathbb{R}^m \xrightarrow{f_2} \mathbb{R}^k \xrightarrow{f_1} \mathbb{R}^n$
וגם לבג $\quad$ Borel $\quad$ Borel

לא תמיד מדידה!! $\quad \mathbb{R}^m \xrightarrow{f_2} \mathbb{R}^k \xrightarrow{f_1} \mathbb{R}^n$

Lebesgue $\quad$ Lebesgue

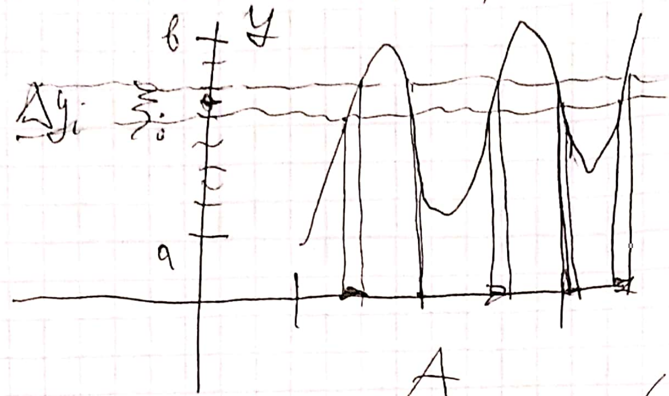
(47)

Lebesgue אינטגרל VI

מדידה
לפי לבג

נניח $f: A \to B \subset [a,b]$ סופית

מדידה לפי Lebesgue $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}$



$$I = \int_A f(x)\,dx$$

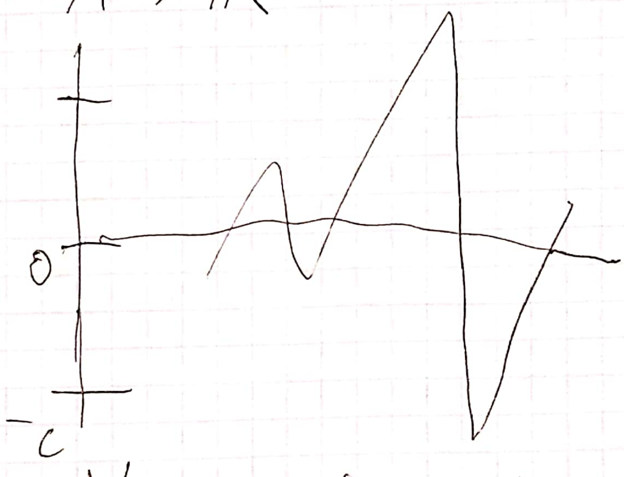
$$I = \lim_{\max|\Delta y_i| \to 0} \sum \xi_i \, \mu\left(f^{-1}(\Delta y_i)\right)$$

מדידה לכל y_i

$$f: A \to \mathbb{R}$$

$$f_c = \begin{cases} c_1 & f(x) > c_1 \\ f(x) & |f(x)| \le c \\ -c_2 & f(x) < -c_2 \end{cases}$$

$c_1, c_2 > 0$



$$\int_A f(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} \lim_{c_1, c_2 \to \infty} \int_A f_c(x)\,dx$$

VII

(בקטע)
$x(t)$ פונקציה רציפה בהחלט אם ורק אם
~~רק אם~~ היא גזירה כמעט בכל נקודה,
הנגזרת אינטגרבילית לפי Lebesgue

$$x(t) = t_0 + \int_{t_0}^{t} \dot{x}(s)\,ds$$

-1

48

בפרט כל פונקציה ליפשיצית היא רציפה בהחלט ומקיימת את הזהות

לדוגמה $x(t)=|t|$

$$\dot{x}(t)=\begin{cases}1 & t>0\\ \text{לא} & t=0\\ -1 & t<0\end{cases}$$

$$|t| = t_0 + \int_{t_0}^{t} |t|' ds \overset{t_0<0,\,t>0}{=} t_0 + \int_{t_0}^{0}(-1)ds + \int_{0}^{t} 1\, ds =$$

$$= \cancel{t_0} + \cancel{|t_0|} + t = t$$

הכלה דיפרנציאלית

הפתרון להגדיר את הפתרון של ODE עם צד ימין לא רציף עובדת עבור

הכלה דיפרנציאלית (DI) Differential Inclusion

הגדרה $\dot{x} \in F(x) \subset \mathbb{R}^n$

פתרון הוא כל פונקציה $x(t)$ רציפה בהחלט לוקלית שמקיימת את ההכלה כמעט בכל t

הגדרה הכלה $\dot{x} \in F(x)$ נקראת הכלת Filippov אם לכל x

1. $F(x)$ לא ריקה, חסומה וסגורה, (קומפקטית).
2. קמורה convex
3. חצי-רציפה מלמעלה.

upper semicontinuous

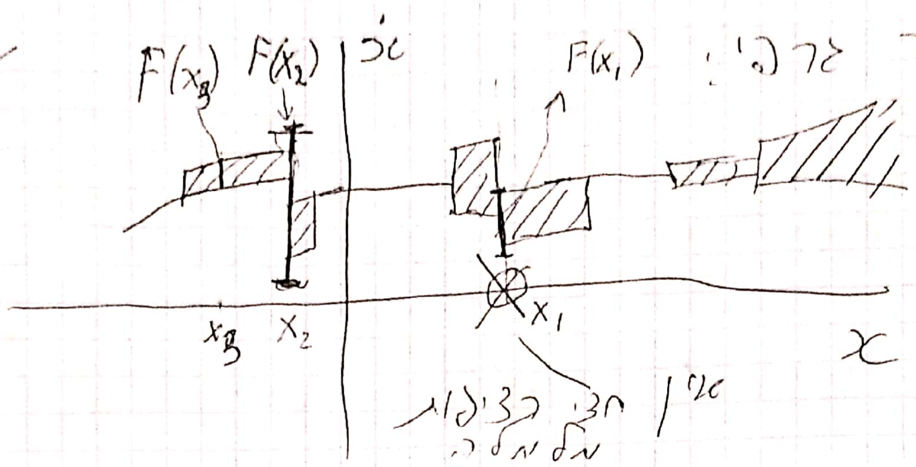
נזכיר $\rho(x,y)=\|x-y\|$, $\rho(x,M)=\inf_{y\in M}\rho(x,y)$

$$\lim_{x'\to x}\ \sup_{y\in F(x')}\rho(y,F(x))=0$$

הערה: מרחק Hausdorff

$$\rho(M,N)=\max\left[\sup_{x\in M}\rho(x,N),\ \sup_{y\in N}\rho(y,M)\right]$$

הסבר גרפי:



הגדרה M קמורה

$$\forall k\ \forall x_1,x_2,\dots,x_k\in M\ \forall \alpha_1\dots\alpha_k\ge 0,\ \alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_k=1$$

$$\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\dots+\alpha_kx_k\in M$$

צירוף קמור

סימון $\overline{M}$ - סגור M, $co M$ קמור M

$\overline{co}M$ - קמור סגור

הגדרה: $\overline{co}M$ זאת הקבוצה הקטנה ביותר שהיא קמורה, סגורה, ומכילה M.

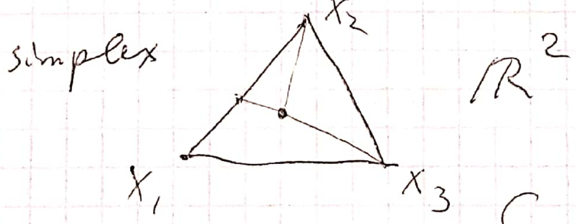
משפט Caratheodory

$M\subset R^n$ חסומה, סגורה

אז:

$$co M=\left\{x\in R^n \,\middle|\, \exists k\le n+1,\ x_1,\dots,x_k\in M:\ x=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i x_i,\ \sum_i\alpha_i=1,\ \alpha_i\ge 0\right\}$$

בנוסף: $co M$ סגור (ספרה, חצי-ספרה, מרובעים)



אם M חסום מקבלים $\overline{co}M=co\overline{M}$

הוכחה: $\overline{M}\subset\overline{co}M\Rightarrow \underbrace{co\overline{M}}_{\text{קמור סגור}}\subset\overline{co}M\Rightarrow co\overline{M}=\overline{co}M$

למה 1

$x_k : [a,b] \to \mathbb{R}^n$

(רציפות בהחלט)

$M \in \{x \mid \|x\| \le L\}$, M - חסומה $\dot{x}_k \in M$

כנ!

$x_k \rightrightarrows x(t) \Rightarrow$ x(t) רציפה בהחלט

במידה שווה

~~$\dot{x}(t) \in co M$~~ ומקיימת

$\dot{x}(t) \in \overline{co} M$ כ"ת $t \in [a,b]$

הוכחה:

$$|x_k(t') - x_k(t'')| \le \left|\int_{t''}^{t'} \dot{x}_k \, dt\right| \le L|t' - t''|$$

$\Leftarrow$ רציפות בהחלט) $\quad k \to \infty \quad |x(t') - x(t'')| \le L|t' - t''|$

$$q_{k,h} = \frac{x_k(t+h) - x_k(t)}{h} = \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \dot{x}_k(s)\, ds$$

$$= \lim_{\max|\Delta_j| \to 0} \frac{1}{h} \sum \dot{x}_{kj}\, \mu(\dot{x}_k^{-1}(\Delta_j))$$

$$\sum_j \mu\, \dot{x}_k^{-1}(\Delta_j) = h$$

$$\alpha_{kj} = \frac{\mu(\dot{x}_k^{-1}(\Delta_j))}{h} \quad \text{נגדיר}$$

$$q_{kh} = \lim_{\max|\Delta_j| \to 0} \sum_k \alpha_{kj}\, \dot{x}_{kj} \in \overline{co} M$$

$$\lim_{k \to \infty} q_{kh} = \underbrace{\frac{x(t+h) - x(t)}{h}}_{q_h} \in \overline{co} M$$

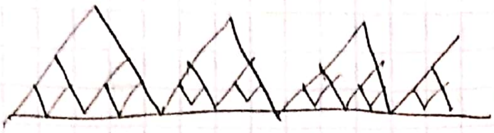
$$\lim_{h \to 0} q_h = \dot{x}(t) \in \overline{co} M$$

כאשר ק"מ

מ.ש.ל.

(51)

פיליפוב



$\dot{x}_k = \pm 1$

$x_k \rightrightarrows 0$

$\dot{x} = 0 \in \overline{co}\{-1,1\} = [-1,1]$

למה

תת-קבוצות של $\mathbb{R}^n$

פונקציה קבוצתית $F: \mathbb{R}^n \to 2^{(\mathbb{R}^n)}$

המקיימת את תנאי Filippov

קומפקטית וחצי-רציפה מלמעלה,

אז $F(x)$ ~~[illegible]~~ חסומה

על כל קומפקט $x \in K \subset \mathbb{R}^n$.

הוכחה: בדיוק כמו במד"ר

לכל נק' x יש סביבה Ω_x

כצור המכיל $F(y) \subset F(x)$; $\forall y \in \Omega_x$

מסויים

$\Leftarrow$ כיסוי סופי של K ... מ.ש.ל.

הגדרה M^ε - ניפוח M ב-ε, $M \in \mathbb{R}^n$

$$M^\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \rho(x, M) \le \varepsilon\}$$

M חסום $\Leftarrow$ M^ε סגורה $\Leftarrow$ קומפקט

$$\overline{co}\, M^\varepsilon = co\, M^\varepsilon = (co\, M)^\varepsilon \quad \text{(Filippov)}$$

הגדרה δ-פתרון זה פתרון להכלה

delta

$$\dot{x}_\delta \in [co\, F(x^\delta)]^\delta$$

למה 2

$\dot{x}_k \in [co\, F(x^{\delta_k})]^{\delta_k}$, $t\in[\alpha,\beta]$

בנוסף $x_k \rightrightarrows x$, $\delta_k \to 0$

אז $x(t)$ רציפה מוחלט ב-$[\alpha,\beta]$

ומקיימת $\dot{x} \in F(x)$

הוכחה

$\forall t_0 \in [\alpha,\beta]:\ x_0 = \lim_{k\to\infty} x_k(t_0)$

$\forall \varepsilon>0$ ניקח סביבה x_0 כך ש

$F(x) \subset F(x_0)^{\varepsilon}$ (מחצי-רציפות מלמעלה)

$\boxed{t_0 \in [\alpha_1,\beta_1]\subset[\alpha,\beta]}$

$\dot{x}_k \in (co\, F(x^{\delta_k}))^{\delta_k} \subset (co\, F(x_0)^{\varepsilon})^{\delta_k}$

$= (F(x_0)^{\varepsilon})^{\delta_k} = F(x_0)^{\varepsilon+\delta_k} \subset F(x_0)^{2\varepsilon}$

$\dot{x}_k \in F(x_0)^{2\varepsilon} \Rightarrow \dot{x} \in \overline{co}\, F(x_0)^{2\varepsilon} = F(x_0)^{2\varepsilon}$ (למה 1)

($x(t)$ - רציפה מוחלט)

כי נכון לכל $\varepsilon>0$ ⇐ $\dot{x}\in F(x_0)$ ב-t_0

אם $x(t)$ גזירה ב-t_0

⇐ מקיים $\dot{x} \in F(x)$

מ.ש.ל.

משפט קיום פתרון לוקלי

בהנתן Filippov $\dot{x}\in F(x)$, $F: G \to 2^{\mathbb{R}^n}$ רציף

$\exists\ x(t_0) = x_0$ תנאי התחלה , $V = \{x \mid \|x-x_0\| \le b\} \subset G$ כדור

$m = \sup\{\|y\| \mid y\in F(x),\ x\in V\}$, $d = \frac{b}{m}$

⇐ הפתרון קיים ב-$t \in [t_0-d,\ t_0+d]$ (לא יחידי)

53 ✓

הוכחה:

תזכורת! משפט Arcela

סדרת פונקציות $x_k(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0: \forall t_1,t_2\in[\alpha,\beta],\ \forall k$

$$|t_1-t_2|<\delta \Rightarrow \|x_k(t_1)-x_k(t_2)\|<\varepsilon$$

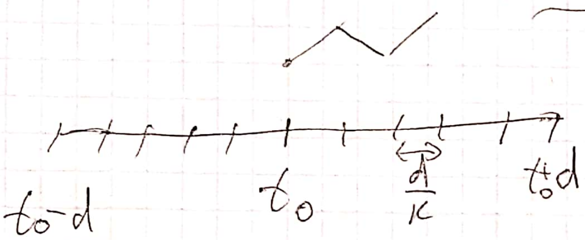
זה נקרא Equicontinuity

אז לסדרה $x_k(\cdot)$ קיימת תת-סדרה

$$x_{k_\ell}\rightrightarrows x_*\quad \ell\to\infty,\ t\in[\alpha,\beta]$$

x_* - רציפה (מתקיים אותו תנאי של equicontinuity)

הוכחת משפט Filippov



$t\in[t_j,t_{j+1}]$, $\dot x_k(t)\in F(x_k(t_j))^{\frac{dm}{k}}$

Euler Integration $\quad x_k(t_{j+1})=x_k(t_j)+\dot x_k(t_j)\cdot\frac{d}{k}$, $\dot x_k(t_j)\in F(x_k(t_j))$

צריך [illegible] $\dot x_k\in\left(\overline{co}\,F(x_k^{\frac{dm}{k}})\right)^{\frac{dm}{k}}$, $\|\dot x_k(t_j)\|\le m$

$\Leftarrow$ תכונת ליפשיץ $\Leftarrow$ equicontinuity

$\Leftarrow$ $\exists x_{k_\ell}\rightrightarrows x$

למה 2 $\Leftarrow$ $\dot x\in F(x)$

מ.ש.ל.

מקרה פרטי $\dot x=f(x),\ f\in C$

משפט קיום הפתרון / לא יחיד (

תכונת ליפשיץ / של f,