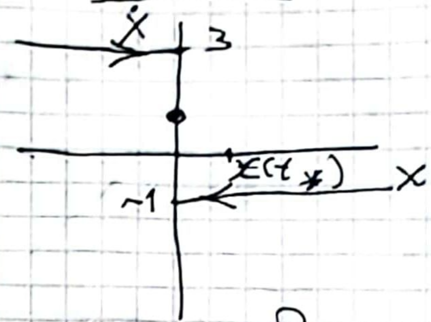
הרצאה 10

1. אין פתרונות בעיית Cauchy למשוואה דיפרנציאלית עם צד ימין לא רציף

$$\dot x = 1 - 2\,\mathrm{sign}\,x$$

$$\dot x = \begin{cases} -1, & x>0 \\ 1, & x=0 \\ 3, & x<0 \end{cases}$$

דוגמה



$$x(0)=0 \Rightarrow \dot x(0)=1$$

$$x(t) = 0 + t + o(t)$$ לפי הגדרה

$$\Rightarrow \exists t_*>0:\ x(t_*)>0$$

אבל $\forall t\in[0,t_*]:\ \dot x(t)<0$

משפט Lagrange: $\exists t_1\in(0,t_*):\ \dot x(t_1)=\frac{x(t_*)}{t_*}>0$

אינטואיטיבית: $x(t)\equiv 0$ — סתירה — מ.ש.ל.

צריך לשנות הגדרה חדשה שמתאים האינטואיציה, בכלל
מקרה פרטי $\dot x = f(t,x)\in C$
מקבל כתוצאה מתפלגים (גבול) לא מדויק
שגיאה וכו'

I. מושגים

$x(t)$ - פונקציה רציפה בהחלט (abs. continuous) על קטע $[\alpha,\beta]$

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall n\ \forall(t_k,\hat t_k),\ k=1,\dots,n\quad k\neq j \Rightarrow [t_k,\hat t_k]\cap[t_j,\hat t_j]=\phi$$

$$\Delta t_j = \hat t_j - t_j > 0$$

$$\sum_{j=1}^n \Delta t_j < \delta \Rightarrow \sum_{j=1}^n |x(\hat t_j)-x(t_j)| < \varepsilon$$

דוגמה: כל פונקציה לוקלי ליפשיצית $\Rightarrow$ רציפה בהחלט

תכונות: f_1, f_2 רציפות בהחלט $\Rightarrow$ $f_1\pm f_2$, λf_1, $f_1(f_2)$, $f_1\cdot f_2$, f_1/f_2 ($f_2\neq 0$) ... רציפות בהחלט לוקלית

V σ אלגברה ∑ מערכת קבוצות

$A_i \in \Sigma \Rightarrow \neg A \in \Sigma$ $(\Rightarrow \emptyset,\ E = A \cup \neg A \in \Sigma)$, $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Sigma$

$\mu : \Sigma \to \mathbb{R}$ מידה (measure)

$\mu(A) \geq 0$, $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu\left(\sum_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum \mu(A_j)$

$j_1 \neq j_2 \Rightarrow A_{j_1} \cap A_{j_2} = \emptyset$

III σ-algebra של Borel! $E = \mathbb{R}^n$

כל קבוצה פתוחה (או סגורה)

מה שקורה לכל המידה $\mu(\mathbb{R}^n) = \infty$

השלמה של Lebesgue Measure completion

מידה חיצונית outer מידה פנימית inner

$\mu^*(G) = \inf_{A \in \Sigma,\ G \subset A} \mu(A)$, $\mu_* = \sup_{A \in \Sigma,\ A \subset G} \mu(A)$

$\mu(G) \stackrel{def}{=} \mu^*(G) = \mu_*(G)$ (Jordan)

ומידה אפס השלמה $\stackrel{def}{=}$ $\mu(A) = 0,\ B \subset A \Rightarrow \exists \mu(B) = 0$

Lebesgue! $\forall S$: $\mu^*(A) = \mu^*(S \cap A) + \mu^*(A \setminus S)$

קריטריון כללי

A ז"א מדידה לפי השלמה

דוגמה Vitali $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ ובנוסף תנאי לא מדידה $(\Leftarrow$

קב' לא מדידה

Banach-Tarsky 1924! $B \subset \mathbb{R}^3 = S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_5 = B_1 + B_2$

סיבובים והזזות

כדור לא מדידות

IV פונקציות מדידות לפי לבג:

$f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ Lebesgue ← Borel

$f^{-1}(A)$ A

V פונקציה מדידה לפי Lebesgue

3

$$f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$

מקור של כל קבוצה מדידה לפי Borel
הוא קבוצה מדידה לפי Lebesgue

בצורה סימבולית:

$$\text{Lebesgue} \to \text{Borel}$$

דוגמאות:

$$\mathbb{Q}, \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$$

מידה 0: $\mu(\mathbb{Q}) = \mu(\mathbb{Z}) = 0$ קו $\subset \mathbb{R}^n$ בממד

כל פונקציה אלמנטרית היא מדידה לפי Lebesgue

פונקציה מדידה לפי Borel:

לפי Borel: $\text{Borel} \to \text{Borel}$

פונקציה מדידה לפי בורל תמיד מדידה, לפי לבג, Lebesgue.

$f_1(f_2)$ $\underset{\text{Lebesgue}}{\mathbb{R}^m \xrightarrow{f_2}} \underset{\text{Borel}}{\mathbb{R}^k \xrightarrow{f_1}} \mathbb{R}^n$ — מדידה, לפי Lebesgue

$\underset{\text{Borel}}{\mathbb{R}^m \xrightarrow{f_2}} \underset{\text{Borel}}{\mathbb{R}^k \xrightarrow{f_1}} \mathbb{R}^n$ — מדידה, לפי בורל וגם לבג

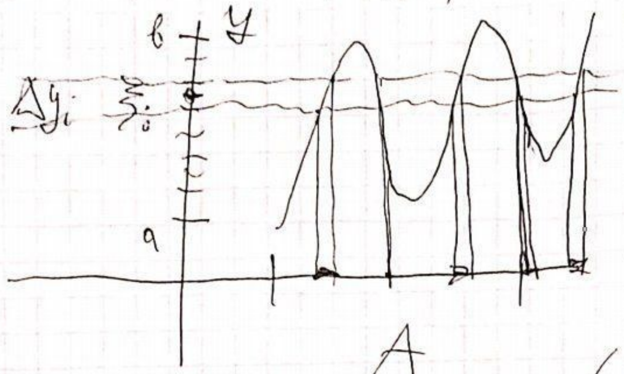
$\underset{\text{Lebesgue}}{\mathbb{R}^m \xrightarrow{f_2}} \underset{\text{Lebesgue}}{\mathbb{R}^k \xrightarrow{f_1}} \mathbb{R}^n$ — לא תמיד מדידה!!

אינטגרל Lebesgue $\overline{VI}$

[illegible]

נניח $f: A \to B \subset [a,b]$ חסומה

$A \subset \mathbb{R}^n,\ B \subset \mathbb{R}$ מדידה לפי Lebesgue



$$I = \int_A f(x)\,dx$$

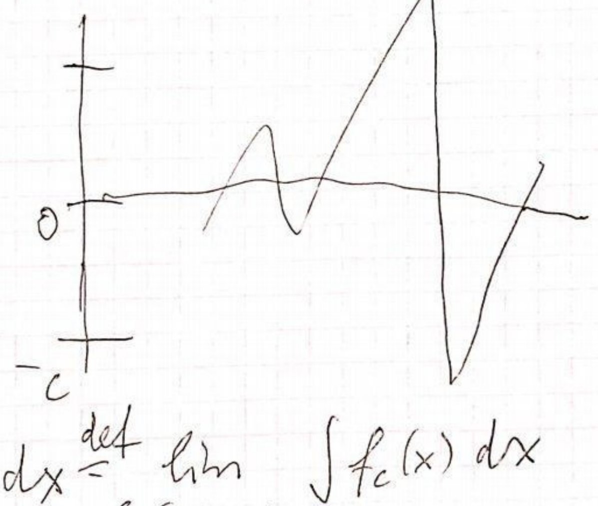
$$I = \lim_{\max|\Delta y_i| \to 0} \sum \xi_i\, \mu\left(f^{-1}(\Delta y_i)\right)$$

חלוקה בציר y

$$f: A \to \mathbb{R}$$

$$f_c = \begin{cases} c_1 & f(x) > c_1 \\ f(x) & |f(x)| \le c \\ -c_2 & f(x) < -c_2 \end{cases}$$

$c_1, c_2 > 0$



$$\int_A f(x)\,dx \overset{def}{=} \lim_{c_1,c_2\to\infty} \int_A f_c(x)\,dx$$

$\overline{VII}$

$x(t)$ פונקציה רציפה בהחלט (בקטע) אם ורק אם ~~ורק אם~~ היא גזירה במעט בכל נקודה, הנגזרת אינטגרבילית לפי Lebesgue ו-

$$x(t) = t_0 + \int_{t_0}^{t} \dot{x}(s)\,ds$$

בפרט כל פונקציה ליפשיצית היא רציפה בהחלט ומקיימת את הנוסחה

למשל $x(t)=|t|$ $\quad \dot{x}(t)=\begin{cases}1 & t>0\\ \text{אין} & t=0\\ -1 & t<0\end{cases}$

$$|t| = t_0+\int_{t_0}^{t}|s|'\,ds \overset{t_0<0,\ t>0}{=} t_0+\int_{t_0}^{0}(-1)\,ds+\int_{0}^{t}1\,ds = \cancel{t_0}+\cancel{|t_0|}+t = t$$

הכלה דיפרנציאלית

הצורך להגדיר את הפתרון של ODE עם צד ימין לא רציף עורר צורך

הכלה דיפרנציאלית Differential Inclusion (DI)

הגדרה $\dot{x}\in F(x)\subset\mathbb{R}^n$

פתרון הוא כל פונקציה $x(t)$ רציפה בהחלט לוקלית שהיא מקיימת את ההכלה כמעט בכל t

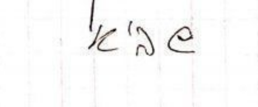
הגדרה הכלה $\dot{x}\in F(x)$ נקראת הכלת Filippov אם לכל x

1. $F(x)$ לא ריקה, חסומה וסגורה (קומפקטית)
2. קמורה convex
3. חצי-רציפה מלמעלה

upper semicontinuous

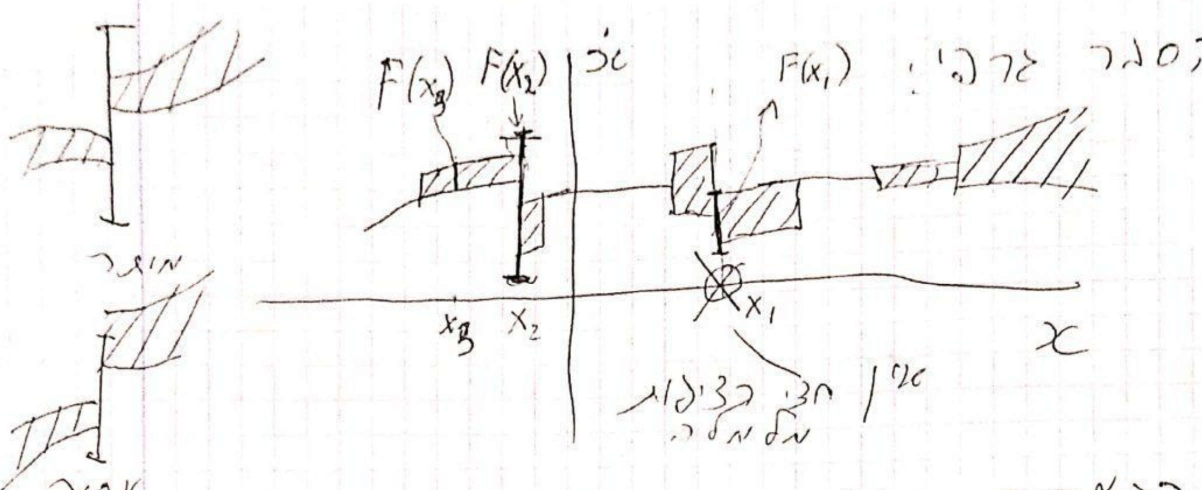
כזכור $\rho(x,y)=\|x-y\|$, $\rho(x,M)=\inf_{y\in M}\rho(x,y)$

$$\lim_{x'\to x}\sup_{y\in F(x')}\rho(y,F(x))=0$$



תזכורת: מרחק Hausdorff $\rho(M,N)=\max\left[\sup_{x\in M}\rho(x,N),\ \sup_{y\in N}\rho(y,M)\right]$

הסבר גרפי:



<u>הגדרה</u> M קמורה,

$$\forall k\ \forall x_1, x_2, \dots, x_k \in M\ \forall \alpha_1 \dots \alpha_k \geq 0,\ \alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_k = 1$$

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_k x_k \in M$$

צירוף קמור

<u>סימון</u> $\bar{M}$ - סגור של M, $\mathrm{co}M$ קמור M, $\overline{\mathrm{co}}M$ - קמור סגור

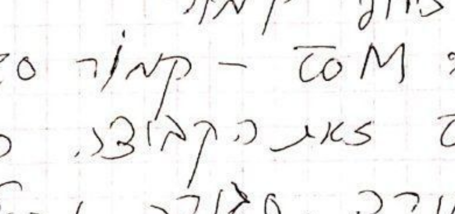
הגדרה: $\overline{\mathrm{co}}M$ זאת הקבוצה הקטנה ביותר שהיא קמורה, סגורה, ומכילה M.

<u>משפט Caratheodory</u>

$M \subset \mathbb{R}^n$ חסום, סגור

אז:
$$\mathrm{co}M = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \exists k \leq n+1,\ x_1, \dots, x_k \in M : x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i,\ \sum_i \alpha_i = 1,\ \alpha_i \geq 0 \right\}$$

בנוסף: $\mathrm{co}M$ סגור (ספרה, חצי-ספרה, מרכוס)



לM חסום מקבלים $\overline{\mathrm{co}}M = \mathrm{co}\bar{M}$

<u>הוכחה:</u> $\bar{M} \subset \overline{\mathrm{co}}M \Rightarrow \underbrace{\mathrm{co}\bar{M}}_{\text{קמור וסגור}} \subset \overline{\mathrm{co}}M \Rightarrow \mathrm{co}\bar{M} = \overline{\mathrm{co}}M$

למה 1

$x_k : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ רציפות בהחלט

$\dot{x}_k \in M$, M - חסומה , $M \in \{x \mid \|x\| \le L\}$ לכל k!

$x_k \rightrightarrows x(t) \Rightarrow$ $x(t)$ רציפה בהחלט ומקיימת

במידה שווה

$t \in [a,b]$ לכל $\dot{x}(t) \in \overline{co}\, M$

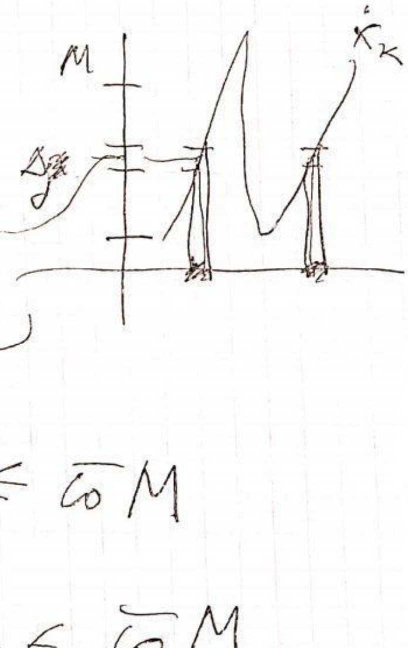
הוכחה:

$$|x_k(t') - x_k(t'')| \le \left| \int_{t''}^{t'} \dot{x}_k \, dt \right| \le L\,|t' - t''|$$

$\Leftarrow$ רציפות בהחלט $\quad |x(t') - x(t'')| \le L|t' - t''| \quad k \to \infty$

$$q_{k,h} = \frac{x_k(t+h) - x_k(t)}{h} = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \dot{x}_k(s)\, ds$$

$$= \lim_{\max|\Delta_j| \to 0} \frac{1}{h} \sum \dot{x}_{kj}\, \mu(\dot{x}_k^{-1}(\Delta_j))$$



$$\sum_j \mu\, \dot{x}_k^{-1}(\Delta_j) = h$$

נגדיר $\alpha_{kj} = \dfrac{\mu(\dot{x}_k^{-1}(\Delta_j))}{h}$

$$q_{kh} = \lim_{\max|\Delta_j| \to 0} \sum_k \alpha_{kj}\, \dot{x}_{kj} \in \overline{co}\, M$$

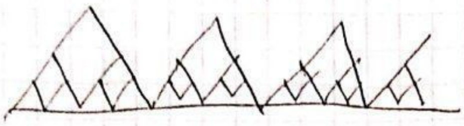
$$\lim_{k \to \infty} q_{kh} = \underbrace{\frac{x(t+h) - x(t)}{h}}_{q_h} \in \overline{co}\, M$$

$$\lim_{h \to 0} q_h = \dot{x}(t) \in \overline{co}\, M$$

כאשר קיים $\qquad$ מ.ש.ל.

דוגמא

8



$x'_k = \pm 1$

$x_k \rightrightarrows 0$

$\dot{x} = 0 \in \overline{co}\{-1,1\} = [-1,1]$

למה

תת-קבוצות של $\mathbb{R}^n$

$F:\mathbb{R}^n \to 2^{(\mathbb{R}^n)}$ פונקציה קבוצתית

המקיימת את תנאי Filippov

קומפקטי, וחצי-רציפה מלמעלה,

אז $F(x)$ ~~[illegible]~~ חסומה

על כל קומפקט $x \in K \subset \mathbb{R}^n$.

הוכחה: בדיוק כמו בחדו"א

לכל נק' x יש סביבה Ω_x שבה

$\forall y \in \Omega_x$: $F(y) \subset$ כדור המכיל $F(x)$ מסויים

$\Leftarrow$ כיסוי סופי של K ... מש.ל.

הגדרה M^ε - ניפוח M ב-ε, $M \subset \mathbb{R}^n$

$M^\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \rho(x,M) \le \varepsilon\}$

M חסום $\Leftarrow$ M^ε סגורה $\Leftarrow$ קומפקט)

$\overline{co}\, M^\varepsilon = co\, M^\varepsilon = (co\, M)^\varepsilon$ (Filippov)

הגדרה δ-פתרון (delta) זה פתרון להכלה

$\dot{x}_\delta \in [co\, F(x^\delta)]^\delta$

למה 2.

$\dot x_k \in [co F(x^{\delta_k})]^{\delta_k}$, $t\in[\alpha,\beta]$

$\delta_k \to 0$, $x_k \rightrightarrows x$ בקטע

אז $x(t)$ רציפה, בהחלט ב-$[\alpha,\beta]$

ומקיימת $\dot x \in F(x)$

הוכחה

$\forall t_0 \in [\alpha,\beta]: \ x_0 = \lim_{k\to\infty} x_k(t_0)$

$\forall \varepsilon>0$ ניקח סביבת x_0 כך שבה

$F(x) \subset F(x_0)^{\varepsilon}$ (מחצי-רציפות מלמעלה)

$t\in[\alpha_1,\beta_1]\subset[\alpha,\beta]$, $t_0\in$

$\dot x_k \in (co F(x^{\delta_k}))^{\delta_k} \subset (co F(x_0)^{\varepsilon})^{\delta_k}$

$= (F(x_0)^{\varepsilon})^{\delta_k} = F(x_0)^{\varepsilon+\delta_k} \subset F(x_0)^{2\varepsilon}$

$\dot x_k \in F(x_0)^{2\varepsilon} \Rightarrow \dot x \in \overline{co} F(x_0)^{2\varepsilon} = F(x_0)^{2\varepsilon}$ (למה 1)

($x(t)$ - ליפ', בהחלט)

כיוון שלכל $\varepsilon>0$ $\Leftarrow$ $\dot x \in F(x_0)$ ב-t_0

אם $x(t)$ גזירה, ב-t_0

$\Leftarrow$ מתקיים $\dot x \in F(x)$ מ.כ.ל

משפט קיום פתרון לוקלי

בעיית Filippov $\dot x \in F(x)$, $F: G \to 2^{\mathbb{R}^n}$ (תחום)

$x(t_0)=x_0$ $\exists$ (תנאי התחלה) , $V=\{x \mid \|x-x_0\|\le b\} \subset G$ (כדור)

$m = \sup\{\|y\| \mid y\in F(x), x\in V\}$, $d=\frac{b}{m}$

$\Leftarrow$ הפתרון קיים ב- $t\in[t_0-d, t_0+d]$ (לא יחיד)

הוכחה:

Arzela - Ascoli

תזכורת! משפט (

סדרת פונקציות $t\in[\alpha,\beta]$, $x_k(t)$ 10

חסומה

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0: \forall t_1,t_2\in[\alpha,\beta],\quad \forall k$

$$|t_1-t_2|<\delta \Rightarrow \|x_k(t_1)-x_k(t_2)\|<\varepsilon$$

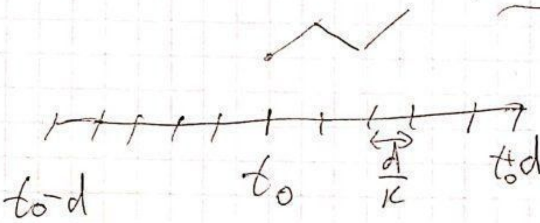
זה נקרה <u>Equicontinuity</u>

אז לסדרה $x_k(\cdot)$ קיימת תת-סדרה,

$$x_{k_l} \rightrightarrows x_* \quad l\to\infty,\ t\in[\alpha,\beta]$$

x_* - רציפה (מקיימת גם את equicontinuity

הוכחת משפט Filippov



$t\in[t_j,t_{j+1}],\ \dot x_k(t)\in F(x_k(t_j)^{\frac{dm}{k}})$

Ψ

Euler Integration $\quad x_k(t_{j+1}) = x_k(t_j) + \dot x_k(t_j)\cdot\frac{d}{k},\quad \dot x_k(t_j)\in F(x_k(t_j))$

$\|\dot x_k(t_j)\|\le m,\quad \dot x_k\in\left(co\,F(x_k^{\frac{dm}{k}})\right)^{\frac{dm}{k}}$ ערך מוחלט

equicontinuity $\Leftarrow$ לפשיץ $\Leftarrow$ תכונת

$\Leftarrow\quad \exists\, x_{k_l}\rightrightarrows x$

$\dot x\in F(x)\quad\Leftarrow$ למה 2

מ.ש.ל.

מקרה פרטי, $\dot x=f(x),\ f\in C$

משפט קיום הפתרון // אך צריך (

תכונת לפשיץ / של f ,