הרצאה 9

משפט אי-יציבות (Chetaev)

1

$\dot x = f(t,x)$, $f(t,x_0)\equiv 0$, $f\in C$

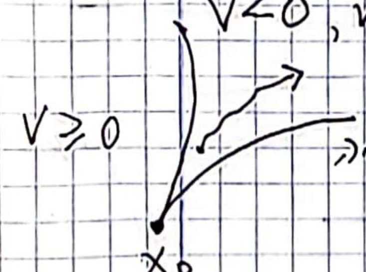
סביב γ, $\|x-x_0\|\le\gamma$, $\forall t\ge t_0$

מתי הפתרון $x(t)=x_0$ לא יציב?

פונקציית Chetaev

1. $V:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $V\in C^1$, נגזרות קיימות מסביבה

2. $x_0\in\partial\{x\in\mathbb{R}^n \mid V(x)>0\}$ $V<0$, $\dot V\ge w_0$



3. בתחום $V(x)>0$ קיימת סביבת x_0 כזאת שבה

$\dot V(t,x)\ge w(x)$

$w:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $w\in C$, כי חיובית ב $\{V(x)>0\}$

$\Leftarrow$ אי-יציבות

הוכחה: צריך להוכיח ש $\boxed{x_0=0}$

$\exists\varepsilon>0\ \forall\delta>0\ \exists x(t):\ \|x(t_0)\|<\delta$ $\|x(t_1)\|\ge\varepsilon$, $t_1\ge t_0$

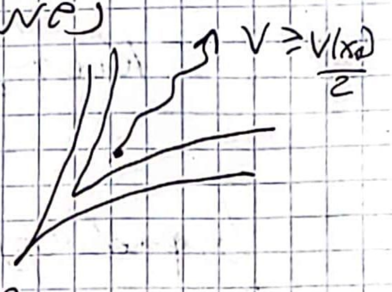
ניקח $x(t_0)\in\{V>0\}\cap\{\|x\|<\delta\}$ $\Leftarrow$ $x(t_0)\in\{V>0\}$

$\Omega=\{\|x\|\le\varepsilon,\ V\ge\frac12 V(x(t_0))\}$ קומפקט

V עולה, $\dot V\ge\min_{\Omega} w=\alpha>0$

$V\ge\frac12 V(x(t_0))$ נשמר $\Leftarrow$ תוך זמן סופי הפתרון יעזוב את Ω ו $\|x\|\le\varepsilon$

מ.ש.ל.



דוגמא

$$\dot x = y - x^3y^3 + y^6 + ty^2$$
$$\dot y = y - 2x^3y^3 - x^6 + ty^2$$

$(x,y)=0$
יציבות?

$$V = x-y \quad , \quad (x-y)^{\cdot} = x^6 + x^3y^3 + y^6 = \underbrace{\left(x^3+\tfrac{1}{2}y^3\right)^2 + \tfrac{3}{4}y^6}_{W} \geq 0$$

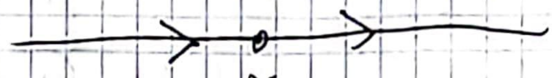
אין יציבות

2

מקרה סקלרי

$x \in \mathbb{R}$, $f(x_0)=0$, $f \in C$

$$\dot x = f(x)$$



x_0

x_0

יציבות אסימפטוטית

אין יציבות

פונקציית Lyapunov: $V(x) = (x-x_0)^2$

$$\dot V = 2(x-x_0)f(x)$$

גם Chetaev!

את מקבלים

דוגמא

$$\dot x = \sin x^2 \, tg\, x \ , \quad x_0 = 0$$

אין יציבות

$$\dot x = -\operatorname{sign} x \ |x|^{\frac{3}{4}}$$

יש יציבות אסימפטוטית

Kurzweil (1956)

משפט $f \in C$, $\dot x = f(x)$

יציבות אסימפטוטית $\Leftrightarrow$ קיימת פונקציית Lyapunov $V \in C^\infty$

$(\dot V = -w)$

יציבות בקירוב הראשון

3

$x\in\mathbb{R}^n$, $\dot{x} = f(t,x) = A(x-x_0) + R(t,x)$

A מטריצה קבועה, $R(t,x) = o(\|x-x_0\|)$

הסבר. $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall x: \|x-x_0\|<\delta \Rightarrow \|R(t,x)\| \le \varepsilon\|x-x_0\|$ $\forall t\ge t_0$

לכן $f(t,x_0)\equiv 0$ $\forall t>t_0$

מקרה פרטי: $\dot{x} = f(x),\ f(x_0)=0,\ f\in C^1$

$$\dot{x} = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0)}_{A}(x-x_0) + \underbrace{o(x-x_0)}_{R(x)}$$

(ליניאריזציה $\dot{x}=Ax$) spectrum, spectre

משפט 1: $\operatorname{Spec} A\in\mathbb{C}_-$ $\Leftarrow$ יציבות אסימפטוטית (לוקלית)

$\mathbb{C}_- = \{z\in\mathbb{C},\ \operatorname{Re} z<0\}$

$\mathbb{C}_+ = \{z\in\mathbb{C},\ \operatorname{Re} z>0\}$

משפט 2: $\operatorname{Spec} A\cap\mathbb{C}_+\neq\emptyset$ $\Leftarrow$ אין יציבות (בלי הוכחה)

תוכנית ההוכחה:

1. יש פונקציית ליאפונוב $V_L(x)$ למשוואה $\dot{x}=Ax$
2. אותה פונקציה $V(x)=V_L(x-x_0)$ מתאימה LF למשוואה המקורית

הוכחת 1. קיימת פונקציה $V_L = x^T H x$

כאשר $H=H^T$ סימטרית, $A,H\in\mathbb{R}^{n\times n}$

$$\dot{V}_L = \frac{d}{dt}(x^T H x) = (Ax)^T H x + x^T H A x$$

$$\dot{V}_L = x^T(A^T H + HA)x$$

נרצה לקבל מוגדרת שלילית

מקבלים את המשוואה

$$A^TH+HA=Q<0,\quad Q^T=Q$$

$\Updownarrow$ x^TQx negative definite

למה: $\forall Q\in\mathbb{R}^{n\times n}$ $\Leftarrow$ $\operatorname{Spec} A\subset\mathbb{C}_-$ (הורביץ) 4

קיים ויחיד $H^T=H$, $H\in\mathbb{R}^{n\times n}$ סימטרי

הפתרון: $$H=-\int_0^\infty e^{A^Tt}Qe^{At}\,dt$$

מציבים $\Downarrow$

הוכחת התכנסות:

$$A^TH+HA=-\int_0^\infty\left(A^Te^{A^Tt}Qe^{At}+e^{A^Tt}Qe^{At}A\right)dt$$

$$=-\int_0^\infty\frac{d}{dt}\left(e^{A^Tt}Qe^{At}\right)dt=-\underbrace{\lim_{t\to\infty}e^{A^Tt}Qe^{At}}_{=0}+Q$$

מ.ש.ל.

יחידות!

$$\pi: H\xrightarrow{\text{על}}A^TH+HA=Q$$

$$H\leftarrow Q\quad:\pi^{-1}$$

כי את כל Q קיים פתרון "על"

גם שווה מימדים $\frac{n(n+1)}{2}$

$\Leftarrow$ גם חח"ע

מ.ש.ל.

הוכחת 2,

$$V(x)=(x-x_0)^TH(x-x_0)=\Delta x^TH\Delta x$$

$$\dot x=\dot{\Delta x}=A\Delta x+o(\Delta x)$$

$$\dot V=(\Delta x^TH\Delta x)^\cdot=\Delta x^TA^TH\Delta x+\Delta x^THA\Delta x$$
$$\left.\begin{aligned}&+o(\Delta x)^TH\Delta x\\&+\Delta x^THo(\Delta x)\end{aligned}\right\}o(\|\Delta x\|^2)$$

$$\dot V=\Delta x^T(A^TH+HA)\Delta x+o(\|\Delta x\|^2),\quad e=\frac{\Delta x}{\|\Delta x\|}$$

$$\dot V=\|\Delta x\|^2\left(e^TQe+o(1)\right)\le 0$$

$\Delta x<\delta$ קטן מספיק

ליאפונוב מתקיים

מ.ש.ל.

דוגמאות!

1. כל נקודות קריטיות ב $\mathbb{R}^2$ שיש להן "יציבה" בעצם — יציבות אסימפטוטית גלובלית (למה של Lyapunov)
"לא יציבה" — במובן כך

5

2. $(x_0, y_0)^T = (1, 0)$

$$\begin{cases} \dot{x} = \sin(x - 2y - 1) \\ \dot{y} = 3x - 5y + xy - 3 \end{cases}$$

$$\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial (x,y)}\right|_{(1,0)} = \begin{pmatrix} \cos(x-2y-1), & -2\cos(x-2y-1) \\ 3 + y, & -5 + x \end{pmatrix}_{(1,0)}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}, \quad p(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda+2)(\lambda+1)$$

asymptotic stability

3. $(x_0, y_0) = (1, 0)$

$$\begin{cases} \dot{x} = \sin(x - 2y - 1) \\ \dot{y} = 3x - 5y + 7xy - 3 \end{cases}$$

$$A = \left.\begin{pmatrix} \cos(x-2y-1), & -2\cos(x-2y-1) \\ 3 + 7y, & -5 + 7 \end{pmatrix}\right|_{\substack{x=1 \\ y=0}}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1, & -2 \\ 3, & 2 \end{pmatrix} \quad p(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 8$$

$$9 - 32 = -29 \qquad \lambda_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{29}\, i \in \mathbb{C}_+$$

unstable

4. $(x_0, y_0) = 0$, $A = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $p(\lambda) = \lambda^2 + 12$

מרכז לא קובע

$$\begin{cases} \dot{x} = -4y - x^3 \\ \dot{y} = 3x - y^3 \end{cases}$$

$$V(x) = 3x^2 + 4y^2$$

$$\dot{V} = 6x(-4y - x^3) + 8y(3x - y^3) = -6x^4 - 8y^4 \le 0$$

יציבות אס' גלובלית

5.

$$\begin{cases} \dot{x} = -4y + x^3 \\ \dot{y} = 3x + y^3 \end{cases} \qquad \dot{V} = 6x^4 + 8y^4 \ge 0$$

finite time escape

אי יציבות (Chetaev)

פולינומים יציבים

Stable (Hurwitz) polynomials

פולינום עם מקדמים ממשיים נקרא יציב אם כל השורשים שלו ב-$\mathbb{C}_-$.

טענה

$\lambda^2+b\lambda+c$, $b,c\in\mathbb{R}$ יציב

$b>0,\ c>0 \iff$

הוכחה: "$\Rightarrow$"

$b,c>0 \Rightarrow \lambda_{1,2}=-\frac{b}{2}\pm\frac{\sqrt{b^2-4c}}{2}$

$b^2\geq 4c \Rightarrow 0<b^2-4c<b^2 \Rightarrow \lambda_{1,2}<0$

$b^2<4c \Rightarrow \lambda_{1,2}=-\frac{b}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{4c-b^2}\,i$

"$\Leftarrow$" יציב $\Leftarrow \lambda_{1,2}\in\mathbb{C}_-$

$\lambda_{1,2}\in\mathbb{R},\ \lambda_{1,2}<0 \quad p(\lambda)=(\lambda+\underset{-\lambda_1}{|\lambda_1|})(\lambda+\underset{-\lambda_2}{|\lambda_2|})$

$\lambda_{1,2}\in\mathbb{C},\ \lambda_{1,2}=\alpha\pm\beta i,\ \alpha<0,\ -\alpha=|\alpha|$, $p(\lambda)=(\lambda+|\alpha|+\beta i)(\lambda+|\alpha|-\beta i)$

$=\lambda^2+2|\alpha|\lambda+\alpha^2+\beta^2$

מש"ל

טענה

פולינום $p(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\dots+a_n$ יציב

$a_1,\dots,a_n\in\mathbb{R}$

$a_1,a_2,\dots,a_n>0 \Leftarrow$

הוכחה:

שורשים $-\gamma_1,\dots,-\gamma_k<0,\ -\alpha_1\pm\beta_1 i,\dots,-\alpha_l\pm\beta_l i$

$k+2l=n$ כאשר $\gamma_j,\alpha_j>0$

$$p(\lambda)=\prod_{j=1}^{k}(\lambda+\gamma_j)\prod_{j=1}^{l}(\lambda^2+2\alpha_j\lambda+\alpha_j^2+\beta_j^2)$$

מש"ל.

<u>שאלה</u> לבדוק יציבות של פתרון קבוע למשוואה, דיפרנציאלית

7

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + \cos(\dot{y} - y) = 0$$

פתרון קבוע $\Leftarrow \ddot{y} = \dot{y} = 0 \Leftarrow \cos(-y) = 0$

$\dot{y} = 0, \quad y = -\frac{\pi}{2} + \pi n$ נק' קריטית

$n = 2k \Rightarrow y = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$$x_1 = y, \quad x_2 = \dot{y}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 + 2x_2 + \cos(x_2 - x_1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -2x_2 \underbrace{- \cos(x_2 - x_1)}_{+\cos(x_1 - x_2)} \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0) = A = \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -\sin(x_2 - x_1), & +\sin(x_2 - x_1) - 2 \end{pmatrix} \Bigg|_{\substack{x_1 = -\frac{\pi}{2} + \pi n \\ x_2 = 0}}$$

$$= \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ \sin\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n\right), & -2 - \sin\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n\right) \end{pmatrix}$$

$$\sin\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n\right) = (-1)^{n+1},$$

$n = 2k \Rightarrow$ even, זוגי
$$\begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & -1 \end{pmatrix} \qquad \lambda^2 + \lambda + 1$$

יציבות אסימפטוטית

$n = 2k + 1 \Rightarrow$ odd, אי-זוגי
$$\begin{pmatrix} 0, & 1 \\ +1, & -3 \end{pmatrix} \qquad \lambda^2 + 3\lambda - 1$$

אין יציבות

אחרת:

$y = y_0 + \Delta y, \quad \dot{y} = \Delta\dot{y}, \quad y_0 = -\frac{\pi}{2} + \pi n$

$$\Delta\ddot{y} + 2\Delta\dot{y} + (-\sin y_0)(\Delta\dot{y} - \Delta y) + o(\Delta y, \Delta\dot{y}) = 0$$

$$\Delta\ddot{y} + 2\Delta\dot{y} + (-1)^n(\Delta y - \Delta\dot{y}) = 0$$

$$\Delta\ddot{y} + (2 - (-1)^n)\Delta\dot{y} + (-1)^n \Delta y = 0$$

$$\lambda^2 + (2 - (-1)^n)\lambda + (-1)^n = 0$$

$n = 2k$ יציבות אס'

$n = 2k+1$

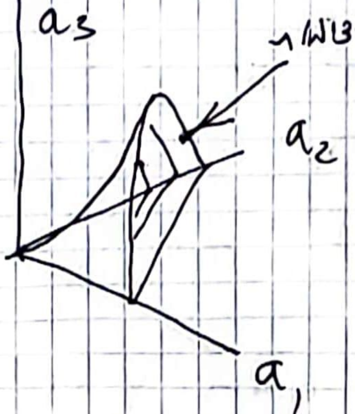
מקרה כללי: קריטריון של Raus-Hurwitz

מקרה פרטי

8

$$\lambda^3+a_1\lambda^2+a_2\lambda+a_3$$

$$a_1,a_2,a_3>0,\quad a_3<a_1a_2 \iff \text{יציבה}$$



״כל עבודה טובה הוא שביר״

Arnold

משוואות דיפרנציאליות עם צד ימין לא רציף

ODE with discontinuous Right-Hand Side

(Filippov , Levant)

בהמשך

$$\dot{x}=f(t,x),\quad f - \text{מדידה לפי Lebesgue}$$

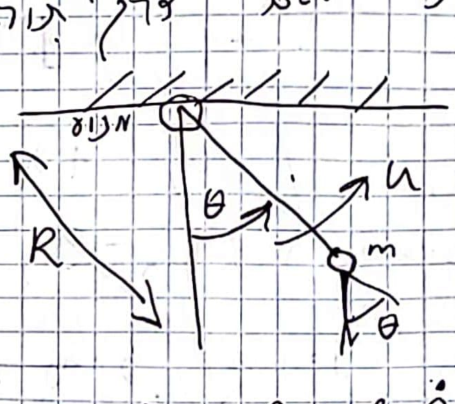
חסומה לוקלית

relay systems, חיכוך,

אני הידעתי לפני עדן תורת הבקרה

דוגמא:

מטוטלת



$$mR^2\ddot{\theta}=mgR\sin\theta-k\dot{\theta}+u$$

בקרה: מומנט סיבובי (חיכוך) מוגבר על-ידי המנוע

היעד: $\theta=\theta_c(t)$

מתקבל בזמן אמת

מקרה כללי יותר

$$\ddot{x} = A(t)\sin x + B(t)\dot{x} + k(t)u$$

היעד: $x = x_{command} = x_c$

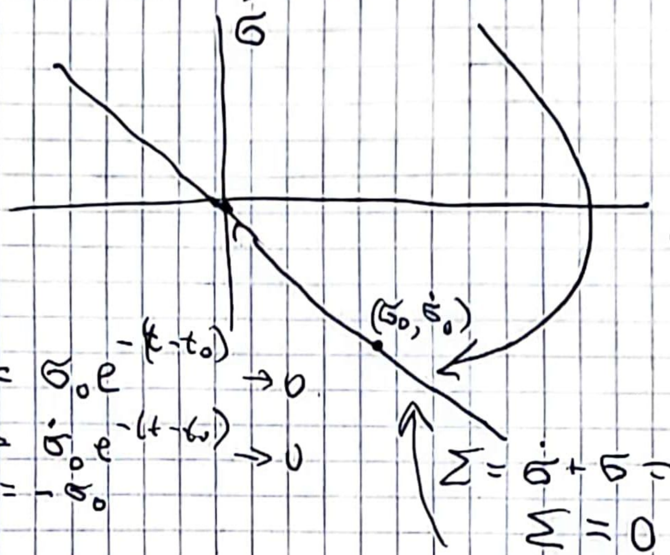
נמדדים $- \; x, \dot{x}, x_c, \dot{x}_c$ ו $|A|, |B| \le 1$ ו $k \in [1,2]$

$|\dot{x}_c|, |\ddot{x}_c| \le 1$

היעד: $\sigma = x - x_c = 0$

$$\ddot{\sigma} = \ddot{x} - \ddot{x}_c = A\sin x + B\dot{x} + ku - \ddot{x}_c$$

9



$\Sigma = \sigma + \dot{\sigma}$

הרעיון

$\sigma = \sigma_0 e^{-(t-t_0)} \to 0$

$\dot{\sigma} = \dot{\sigma}_0 e^{-(t-t_0)} \to 0$

$\dot{\sigma}_0 = -\sigma_0$

$\Sigma = \dot{\sigma} + \sigma = 0$

$\Sigma = 0$

$$\dot{\Sigma} = \ddot{\sigma} + \dot{\sigma} = \underbrace{A\sin x + B\dot{x} - \ddot{x}_c + \dot{x} - \dot{x}_c}_{} + ku$$

$$\dot{\Sigma} = F(t,x) + ku$$

$$\in [-1,1]\,(4 + 2|\dot{x}|) + [1,2]\,u$$

ניקח

$$u = -(5 + 2|\dot{x}|) \cdot \operatorname{sign} \Sigma$$

עם בזמן סופי מגיעים ל $\Sigma = 0$

מה הכוונה?

chattering