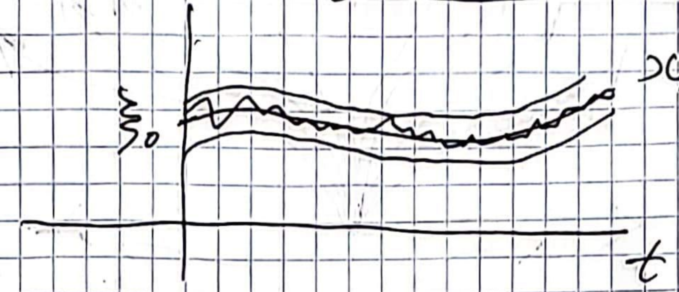
תורת היציבות Stability Theory

לפי Lyapunov

הרצאה 8

$x\in\mathbb{R}^n,\ f\in C$



$\dot x = f(t,x)$

$x(t_0)=\xi$

$x_*(t_0)=\xi_0$

הגדרה

פתרון x_* נקרא יציב לפי ליאפונוב
Lyapunov
Liapunov
אם

1. $\exists\delta_0>0\ \forall\xi\ \|\xi-\xi_0\|<\delta_0$

$\exists x(t): x(t_0)=\xi$, $\forall t\ge t_0$

2. $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$

$\|x(t_0)-\xi_0\|<\delta \Rightarrow \forall t\ge t_0\ \|x(t)-x_*(t)\|<\varepsilon$

כל קירבת הפתרונות ב- $[t_0,\infty)$ (לא קומפקט!)
סוג של "רציפות"

יציבות תמיד לוקלית

משוואה אחת סקלרית

$y^{(n)}=F(t,y,\dot y,\dots,y^{(n-1)})$, $y(t_0)=\xi_1$ ... $y^{(n-1)}(t_0)=\xi_n$

אותה הגדרה אבל בקואורדינטות

$\vec y=(y,\dot y,\dots,y^{(n-1)})^T$

דוגמא

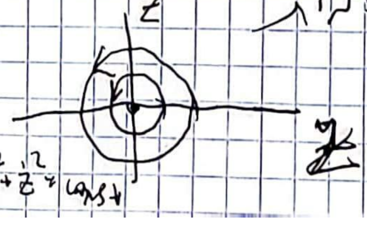
$\ddot y=-y+t$

$y(0)=\dot y(0)=0$ פתרון $y_*(t)=-\sin t+t$

$z=y-y_*$ פתרון של המשוואה ההומוגנית

$\ddot z=-z$ $\quad z=\dot z=0\Leftrightarrow y=y_*$

יציבות



$z=c_1\cos t+c_2\sin t$

$=\sqrt{c_1^2+c_2^2}\cos\left(t-\arccos\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}\right)$, $z^2+\dot z^2=\text{const}$

יציבות אסימפטוטית

יכולה להיות לוקלית (גלובלית)

או גלובלית

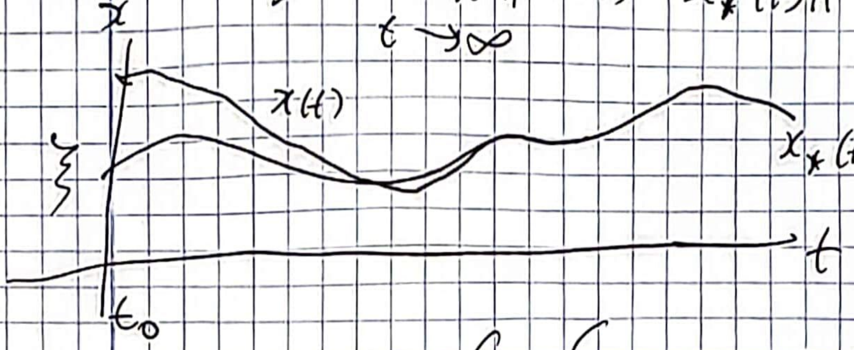
הגדרה $x_*(t)$ נקרא יציב אסימפטוטית (לוקלית)

אם הוא יציב (1.+2.)

3. $\exists \delta_1 > 0 : \|x(t_0) - \xi_0\| < \delta_1$

$$\Rightarrow \lim_{t\to\infty} \|x(t) - x_*(t)\| = 0$$

2



$\dot{x} = f(t,x)$

$x(t_0) = \xi$

$x_*(t_0) = \xi_0$

יציבות אסימפטוטית גלובלית:

לכל תנאי התחלה $x(t_0)$ קיים פתרון לכל $t \geq t_0$

$$\lim_{t\to\infty} \|x(t) - x_*(t)\| = 0$$

כל מערכות של משוואות ספרליות באותה צורה.

דוגמא $\ddot{y} + 2\dot{y} + y = t \ , y_* = t - 2$

$y_*(0) = -2, \ \dot{y}_*(0) = 1$

$z = y - y_*$

$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$, $\lambda_{1,2} = -1$

$\ddot{z} + 2\dot{z} + z = 0$

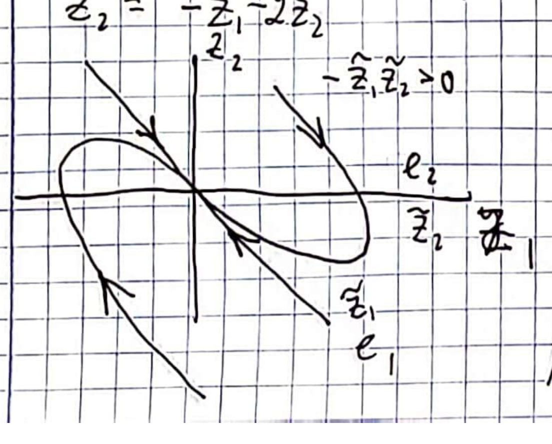
$$\begin{cases} z = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t} \\ \dot{z} = -c_1 e^{-t} + c_2 e^{-t} - c_2 t e^{-t} \end{cases}$$

$\dot{z}_1 = z_2 \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

$\dot{z}_2 = -z_1 - 2z_2$

$\lambda = -1 \qquad z_1 + z_2 = 0 \qquad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = 1 \\ -z_1 - z_2 = -1 \end{cases} \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



יציבות אסימפטוטית

(לא פורמלי)

מעין קפד יציבה

3

הערה: נק' קריטית ξ: $\dot{x}=f(x)$, $f(\xi)=0$, $x\in\mathbb{R}^n$, $\xi\in\mathbb{R}^n$

נקראת יציבה (יציבה אסימפטוטית)

אם כפתרון הקבוע $x(t)\equiv\xi$ יציב (יציבה אסימפטוטית)

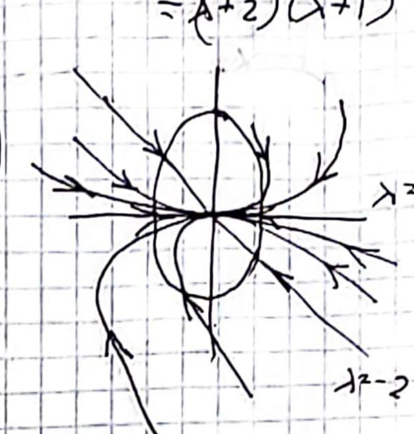
הערה: ל-t_0 אין משמעות ב-ODE אוטונומיים

דוגמא

$$\begin{cases}\dot{x}_1=-x_1+x_2\\ \dot{x}_2=-2x_2\end{cases}\qquad p(\lambda)=\begin{vmatrix}-1-\lambda & 1\\ 0 & -2-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+3\lambda+2=(\lambda+2)(\lambda+1)$$

$\lambda=-2$ $\quad x_1+x_2=0 \quad e_1=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

$\lambda=-1$ $\quad x_2=0 \quad e_2=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

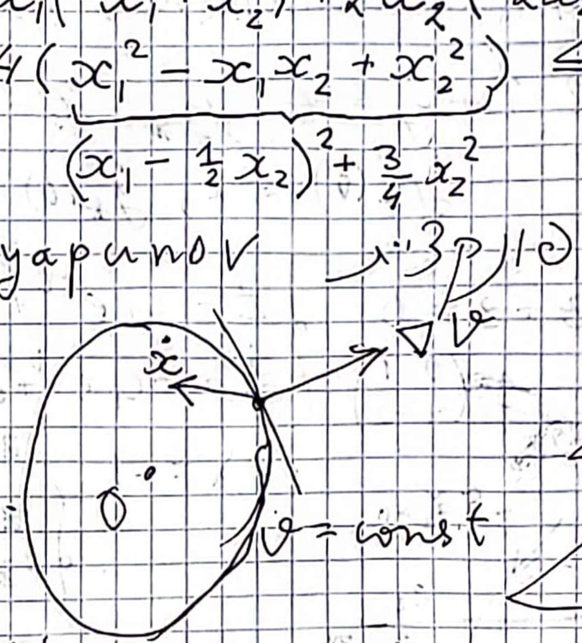


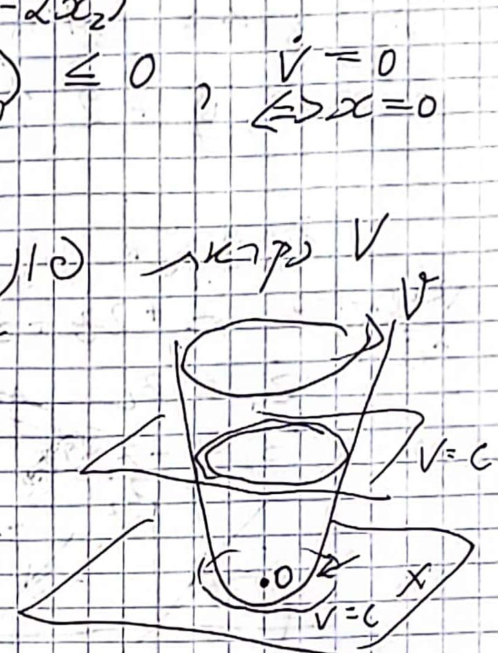
$V=2x_1^2+x_2^2$, $\quad x=x(t)$, $\dot{x}=Ax$

$$\frac{d}{dt}V(x(t))=\frac{\partial V}{\partial x}(x(t))\,Ax(t)=\nabla V\cdot\dot{x}$$

$$\dot{V}=4x_1(-x_1+x_2)+2x_2(-2x_2)=-4\underbrace{(x_1^2-x_1x_2+x_2^2)}_{(x_1-\frac{1}{2}x_2)^2+\frac{3}{4}x_2^2}\le 0,\quad \dot{V}=0\iff x=0$$

V נקראת פונקצית Lyapunov





דוגמא

$x\in\mathbb{R}$, $x^{(5)}-x^{(4)}+\cos t\,x''-(t^2+1)x=\cos^2 t$

$\forall t_0\in\mathbb{R}$, האם יש פתרונות יציבים? אזי $y=x-x_*$

$y^{(5)}-y^{(4)}+\dots=0$

$\dot{W}=-(-1)W$, $|W|\to\infty \Rightarrow$ כי פתרונות y לא חסומים

משפט ליאפונוב

$\dot{x} = f(t,x),\ f(t,x_0) \equiv 0,\ f \in C$

מצב שיווי

$\|x-x_0\| \le \gamma$ סביבה קומפקטית

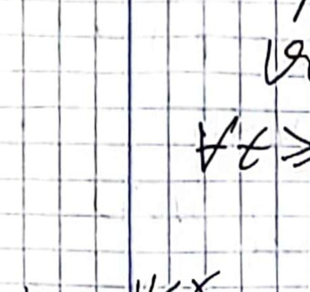
1. $\vartheta(x)$ גזירה ברציפות: $\vartheta \in C^1,\ \vartheta'_x = \nabla\vartheta \in C$

2. $\vartheta(x)$ מוגדרת חיובית positive definite

$\vartheta(x_0)=0,\ \vartheta(x) \ge 0,\ \vartheta(x)=0 \Leftrightarrow x=x_0$

3. $\forall t \ge t_0\ \ \dot{\vartheta}(t,x) = \nabla\vartheta \cdot f \le 0$

$\Leftarrow$ הפתרון הקבוע $x(t) \equiv x_0$ יציב (לפי Lyapunov)



נסתכל במרחב $\|x-x_0\| \le \gamma$ עם טופולוגיה מתאימה.

אז קבוצה פתוחה מ-$\mathbb{R}^n$ נחתכת עם $\|x-x_0\| \le \gamma$ הקבוצה פתוחה (בטופולוגיה החדשה)

למה קבוצות $\left\{x \,\middle|\, \begin{matrix} \vartheta < \varkappa \\ \|x-x_0\| \le \gamma \end{matrix}\right\}$ $\varkappa \ge 0$

מגדירות קבוצות פתוחות (חדשות)

במובן שעבור סביבות שקולה לסטנדרטיות סביב $x=x_0$

1. $\forall \varepsilon>0,\ \varepsilon \le \gamma\ \exists \varkappa>0: \left\{\begin{matrix} \vartheta < \varkappa \\ \|x-x_0\| \le \gamma \end{matrix}\right\} \subset \{\|x-x_0\| < \varepsilon\}$

2. $\forall \varkappa>0\ \exists \varepsilon>0,\ \varepsilon \le \gamma: \{\|x-x_0\| < \varepsilon\} \subset \left\{\begin{matrix} \vartheta < \varkappa \\ \|x-x_0\| \le \gamma \end{matrix}\right\}$

הוכחה: 1: $\varkappa = \frac{1}{2} \min\left\{\vartheta(x) \,\middle|\, \frac{\varepsilon}{2} \le \|x-x_0\| \le \gamma\right\}$

2: רציפות של V בנק' x_0

מ.ש.ל.

הוכחת המשפט

נניח $x_0=0$ לפשטות הסימון

א. פתרונות מוגדרים $\forall t \ge t_0$

$$\{\|x\|<\delta\} \subset \{v \le \varkappa\} \subset \{\|x\|<\gamma\}$$

כל פתרון אשר מתחיל ב $\{\|x\|<\delta\}$

לא יכול לצאת מ $\{v\le\varkappa\}$ כי V לא עולה.

ב. נוכיח $\forall \varepsilon>0, \varepsilon<\gamma$ $\exists\delta$ ש $\|x(t_0)\|<\delta$

$$\Rightarrow \forall t\ge t_0\ \|x(t)\|<\varepsilon$$

נבחר $\{\|x\|<\delta\} \subset \{V\le\varkappa\}\subset\{\|x\|<\varepsilon\}$

שום פתרון לא יכול לצאת מ $\{V\le\varkappa\}$

מש"ל.

דוגמה

$$\begin{cases}\dot x_1 = x_2+3tx_2^2 \\ \dot x_2 = -x_1-3tx_1x_2\end{cases} \quad V = x_1^2+x_2^2 \quad \text{(1st integral)}$$

$$\dot V = 2x_1x_2 + 6tx_1x_2^2 - 2x_2x_1 - 6tx_1x_2^2 = 0 \le 0$$

לפי משפט יציבות Lyapunov: יציבות ניטרלית neutral stability

שם אחר

משפט יציבות אסימפטוטית

$x\in\mathbb{R}^n$, $\|x-x_0\|\le\gamma$, $\dot x = f(t,x)$, $f(t,x_0)\equiv 0\ \forall t\ge t_0$

פונקציית לאפונוב: 1. $v:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $v\in C^1$ 2. $V\ge 0$, $V(x)=0 \Leftrightarrow x=x_0$, $\|x-x_0\|\le\gamma$

3. $\dot v(t,x)=\frac{d}{dt}v(x(t))=\nabla v(x)\cdot f(t,x)\le -w(x)$, $w:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$

$\|x-x_0\|\le\gamma \Rightarrow w(x)>0$, $w(x)=0\Leftrightarrow x=x_0$

$\Leftarrow$ יציבות אסימפטוטית של הפתרון $x(t)\equiv x_0$

$\boxed{\text{נ׳ת } x_0 = 0}$

הוכחה: יציבות כבר יש, נשאר להוכיח

1. $\exists \delta>0\ \ \forall x: \cancel{\|x\|\le\gamma},\ \|x(t_0)\| < \delta \Rightarrow \forall t \ge t_0\ \exists x(t)$, $\exists\ 0<\gamma$

$\delta<\gamma$

$\lim_{t\to\infty} x(t) = x_0 = 0$

$\forall \varepsilon>0\ \exists t_1 \ge t_0: \forall t\ge t_1\ \|x(t)\| < \varepsilon$

אם נוכיח ש $\lim_{t\to\infty} V(x(t)) = 0$

אז $\forall \varkappa > 0\ \exists t_1 \ge t_0 : \forall t \ge t_1\ V(x(t)) < \varkappa$ 6

ניקח: $\varepsilon > \varepsilon_1 > 0$, $\{V(x)<\varkappa\} \subset \{\|x\|<\varepsilon_1\}$ וכנ״ל.

ב. נוכיח $V(t) \to 0$.

נניח שלא, כלומר $V(t) \not\to 0$

$\forall \varepsilon>0\ \exists x(t_0),\ \|x(t_0)\| < \varepsilon$:

$\exists \varkappa>0\ \forall t_1 \ge t_0\ \exists t \ge t_1: V(x(t)) \ge \varkappa$

ניקח ~~ש $0<\varkappa_1 \le \varkappa$ כך,~~ $\{V(x)<\varkappa_1\} \subset \{\|x\|\le\gamma\}$

נניח גם

(תמיד אפשר להקטין $\varkappa$)

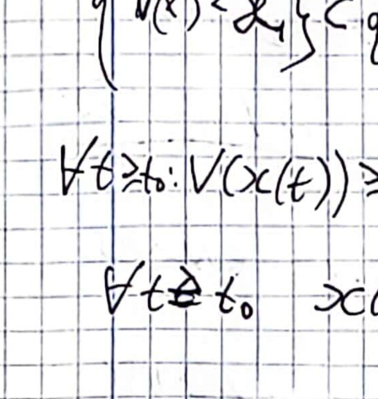
$\dot V \le 0 \Rightarrow$ אם $V(x(t)) \ge \varkappa$ $\forall t \ge t_1$ $\Rightarrow \forall t\ge t_0: V(x(t)) \ge \varkappa$

$\Rightarrow \forall t \ge t_0\ \ x(t) \in \left\{\begin{matrix} V\ge\varkappa \\ \|x\|\le\gamma \end{matrix}\right\}$

$0\notin$ קומפקט

$\Rightarrow \frac{d}{dt} V(x(t)) \le -w(x(t)) \le -\min_{\substack{V\ge\varkappa \\ \|x\|\le\gamma}} w = -\alpha < 0$

$\Rightarrow \dot V \le -\alpha \Rightarrow$ תוך הזמן $\frac{V(x(t_0))}{\alpha}$ $x(t)$ מגיע ל $\begin{matrix} x=0 \\ V=0 \end{matrix}$ $V(x(t))$



סתירה!

מ.ש.ל.

הערה: יציבות לא תלויה בהחלפת קואורדינטות כי ההגדרה היא במונחים של קבוצות פתוחות

יציבות אסימפטוטית גלובלית

$\dot{x} = f(t,x)$, $f(t,x_0) \equiv 0$ $\forall t \geq t_0$, $f \in C$, $x \in \mathbb{R}^n$ $\gamma = \infty$

פונקצי׳ ליאפונוב

1. $V: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, V \in C^1$

2. מוגדרת חיובית

$V(x) \geq 0$, $V(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0$

3. $V(x)$ ר״א radially unbounded

לא חסומה רדיאלית

$\|x\| \to \infty \Rightarrow V(x) \to \infty$

שקול:

$\forall M \in \mathbb{R}$ $\{x \in \mathbb{R}^n \mid V(x) \leq M\}$ חסומה

4. $\dot{V}(t,x) = \nabla V(x) \cdot f(t,x) \leq -w(x)$

$w \in C$, מוגדרת חיובית — $w \geq 0, w(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0$

<u>הוכחה</u> בציור $\gamma = \max \|x - x_0\|$

$V(x) \leq 2V(x(t_0))$

נשתמש במשפט הקודם

<u>דוגמא</u>

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^3 - 2xy^3 \\ \dot{y} = x^2 - y \end{cases}$$

$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = 0$

ליניארזציה:

יציבות

$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = -y \end{cases}$

$V = x^2 + y^4$

$$\dot{V} = 2x \cdot \dot{x} + 4y^3 \cdot \dot{y} =$$
$$= 2x(-x^3 - 2xy^3) + 4y^3(x^2 - y)$$
$$= -2x^4 - 4x^2y^3 + 4y^3x^2 - 4y^4 = \underbrace{-2x^4 - 4y^4}_{-w} \leq 0$$

יש יציבות אסימפטוטית גלובלית