Quasi polynomials , קווזי-פולינומים

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\dots+a_ny=0,\quad a_1\dots a_n\in\mathbb{R}\ (\mathbb{C}/\mathbb{K}),\quad y\in\mathbb{R}$$

1

$$\dot{\vec{y}}=A\vec{y},\quad A=\begin{pmatrix}0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1\\ -a_n & & & -a_1\end{pmatrix}$$

$$\det(A-\lambda I)=(-1)^n\left(\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\dots+a_n\right)$$

למה:

הוכחה:

לפי אינדוקציה:

$$\det\begin{pmatrix}-\lambda & 1 & & \\ 0 & -\lambda & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & 1\\ -a_n & -a_{n-1} & \dots & -a_1-\lambda\end{pmatrix}=-\lambda(-1)^{n-1}\left(\lambda^{n-1}+a_1\lambda^{n-2}+\dots+a_{n-1}\right)+(-1)^{(n-1)}(-a_n)\cdot 1$$

מ.ש.ל.

טענה: לכל ערך עצמי λ יש רק וקטור עצמי אחד

הוכחה:

$$A\xi=\lambda\xi\qquad \xi=\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\ \xi_2=\lambda\xi_1,\ \xi_3=\lambda\xi_2=\lambda^2\xi_1,\ \dots\ \Rightarrow \xi=\xi_1\begin{pmatrix}1\\ \lambda\\ \vdots\\ \lambda^{n-1}\end{pmatrix},\ \xi_1\neq 0$$

אפשר לקחת $\xi_1=1$ מ.ש.ל.

$\Leftarrow$ לכן יש n ... הגדרה,

$$P(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{m_1}\dots(\lambda-\lambda_k)^{m_k},\quad \lambda_1\dots\lambda_k\in\mathbb{R}\ (\mathbb{C})$$

$m_1\dots m_k\in\mathbb{N}$ multiplicities (ריבויים)

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)=\left(\left(\frac{d}{dt}\right)^n+a_1\left(\frac{d}{dt}\right)^{n-1}+\dots+a_nI_0\right)$$

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)y=0$$

$I_0: f(\cdot)\longmapsto f(\cdot)$ אופרטור הזהות

אופרטור דיפרנציאלי

סימון

$$L_{\mu,m}: \left(\frac{d}{dt}-\mu I_0\right)^m y = 0$$

ז'ורדן

$$\frac{d}{dt}-\mu I_0: \quad \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}e^{\mu t} \longmapsto \frac{t^{m-2}}{(m-2)!}e^{\mu t} \longmapsto \dots \longmapsto \frac{t}{1!}e^{\mu t} \longmapsto e^{\mu t} \longmapsto 0$$

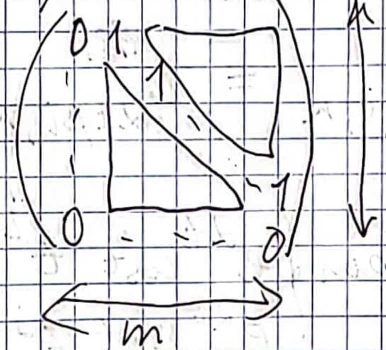
$$e_{m-1} \longmapsto e_{m-2} \longmapsto \dots \longmapsto e_1 \longmapsto e_0 \longmapsto 0$$

$$L_{\mu,m} = \mathrm{Span}\{e_0, e_1, \dots, e_{m-1}\}, \quad 2$$

$$\frac{d}{dt}\frac{t^k}{k!}e^{\mu t} = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}e^{\mu t} + \mu\frac{t^k}{k!}e^{\mu t} \Rightarrow \left\{ e^{\mu t}(\gamma_0+\gamma_1 t+\dots+\gamma_{m-1}t^{m-1}) \;\middle|\; \gamma_0 \dots \gamma_{m-1} \in \mathbb{R} \right\}$$

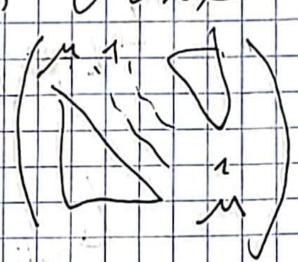
$$\dim L_{\mu,m} = m$$

$\frac{d}{dt}-\mu I_0:$

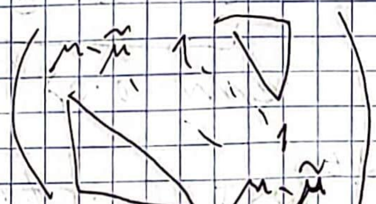


בבסיס הזה:

$\frac{d}{dt}:$



$\frac{d}{dt}-\tilde{\mu} I_0:$



$\mu \neq \tilde{\mu}$

⇐ הפיך!

⇐ קיבלנו פולינומים שונים ל $\mu, \tilde{\mu}$ מלבד תלויים

$$\boxed{p(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n}$$

$$p\left(\frac{d}{dt}\right)y: \left(\frac{d}{dt}-\lambda_1 I_0\right)^{m_1} \cdots \left(\frac{d}{dt}-\lambda_k I_0\right)^{m_k} y = 0$$

$$Y = L_{\lambda_1,m_1} \oplus \dots \oplus L_{\lambda_k,m_k} \qquad m_1+\dots+m_k = n$$

דוגמה

$$p(\lambda) = (\lambda^2-1)^3$$

$$y^{(6)} - 3y^{(4)} + 3\ddot{y} - y = 0$$

$$Y = L_{1,3} + L_{-1,3} = e^{t}(c_1+c_2t+c_3t^2) + e^{-t}(d_1+d_2t+d_3t^2)$$

$$c_1 \dots c_3, d_1 \dots d_3 \in \mathbb{R}\,(\mathbb{C})$$

$$P_{\lambda,k}(t) = e^{\lambda t}(d_0 + d_1 t + d_2 t^2 + \dots + d_k t^k)$$

מקרה של שורשים מרוכבים

3

הכול נשאר נכון מעל $\mathbb{C}$, אבל השורשים מעל $\mathbb{R}$
באים בזוגות צמודים $\lambda = \alpha \pm \beta i$

$$e^{(\alpha+\beta i)t} = e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i\sin(\beta t))$$

$$e^{(\alpha-\beta i)t} = \alpha^{\alpha t}(\cos(\beta t) - i\sin(\beta t))$$

$$e^{\alpha t}\cos(\beta t) = \frac{1}{2}\left(e^{(\alpha+\beta i)t} + e^{(\alpha-\beta i)t}\right)$$

בסיס
אלטרנ(ט)יבי

$$e^{\alpha t}\sin(\beta t) = \frac{1}{2i}\left(e^{(\alpha+\beta i)t} - e^{(\alpha-\beta i)t}\right)$$

$$L_{\alpha+\beta i,k} \oplus L_{\alpha-\beta i,k} = L_{\alpha\pm\beta i,k}$$

מעל $\mathbb{C}$

$$L_{\alpha\pm\beta i,k} = \mathrm{Span}\underbrace{\left\{\begin{matrix} e^{\alpha t}\cos t\, t^j \\ e^{\alpha t}\sin t\, t^j \end{matrix}, j = 0,\dots,k-1\right\}}_{\text{ממשיים, בסיס ממשי}}$$

$$L^{\mathbb{R}}_{\alpha\pm\beta i,k} = \left\{ \begin{matrix} e^{\alpha t}\cos t\,[c_0 + c_1 t + \dots + c_{k-1}t^{k-1}] \\ + e^{\alpha t}\sin t\,[d_0 + d_1 t + \dots + d_{k-1}t^{k-1}] \end{matrix} \right\}$$

$\Downarrow$

$P_{\alpha\pm\beta i,k-1}$ $\quad c_0,\dots,c_{k-1}, d_0,\dots,d_{k-1} \in \mathbb{R}$

$\beta \neq 0 \Rightarrow \dim L^{\mathbb{R}}_{\alpha\pm\beta i,k} = 2k$, $\beta = 0: \dim L^{\mathbb{R}}_{\alpha\pm\beta i,k} = k$, $L^{\mathbb{R}}_{\alpha\pm 0i,k} = L_{\alpha,k}$ $\quad k\mathbb{N} \geq 1$

$$\dddot{y} + 5\ddot{y} - 9\dot{y} + 5y = 0$$

$$\lambda^3 + 5\lambda^2 - 9\lambda + 5 = (\lambda+1)(\lambda^2+4\lambda+5) \qquad \lambda = -1, -2\pm i$$

$$y = L_{-1,1} + L^{\mathbb{R}}_{-2\pm i,1} = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}\cos t + c_3 e^{-2t}\sin t$$

דוגמא

$$y^{IV}+4y''+4y=0$$

$$\lambda^4+4\lambda^2+4=(\lambda^2+2)^2 \Rightarrow \quad \lambda=\pm\sqrt{2}i,\ m=2$$

$$Y=L^{\mathbb{R}}_{\pm\sqrt{2}i,2}=c_1\cos(\sqrt{2}t)+c_2t\cos(\sqrt{2}t)+c_3\sin(\sqrt{2}t)+c_4t\sin(\sqrt{2})t$$

$C_1,\dots,C_4\in\mathbb{R}$ (או $\mathbb{C}$)

4

הערה:

$L^{\mathbb{R}}_{\alpha\pm0i,k}=L_{\alpha,k}$, $\sin(0t)=0$

$\beta=0$

משוואה לא הומוגנית

Undetermined coefficients method

מקדמים בלתי ידועים

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)y=b(t) \qquad b\in L^{\mathbb{R}}_{\alpha\pm\beta i,k}$$

$Y=Y_h+y_p$, הפתרון הכללי?

$b=b_1+b_2+\dots+b_e$

$y_p=y_{p_1}+y_{p_2}+\dots+y_{p_e}$

$\alpha\pm\beta i$ שורש של $p(\lambda)$

מריבוי m, $m\geq0$

הרצאה 5א

אומרים שיש רזוננס, resonance, אם $m>0$

טענה:

קיים פתרון פרטי בצורה

$$y_p=t^m P_{\alpha\pm\beta i,k-1}\in t^m L^{\mathbb{R}}_{\alpha\pm\beta i,k}$$

$$y_p=t^m e^{\alpha t}\left[\cos\beta t\left(\hat{c}_0+\hat{c}_1t+\dots+\hat{c}_{k-1}t^{k-1}\right)+\sin\beta t\left(\hat{d}_0+\hat{d}_1t+\dots+\hat{d}_{k-1}t^{k-1}\right)\right]$$

$\hat{c}_0,\hat{d}_0,\dots,\hat{c}_{k-1},\hat{d}_{k-1}\in\mathbb{R}$ (או $\mathbb{C}$)

הם מספרים קבועים שצריך למצוא

על ידי הצבה

הערה: חזקות של t נמוכות מ t^m אינם!

(מופיעים)

דוגמא

$$\ddot{y}+3\dot{y}+2y=e^{-t}+t^2e^{t}$$

$\lambda^2+3\lambda+2=(\lambda+2)(\lambda+1)$ $\quad m=1 \quad m=0$

$$y_p=y_{p1}+y_{p2}$$

resonance

$$y_{p1}=f\,t e^{-t} \qquad y_{p2}=e^{t}(d_0+d_1t+d_2t^2)$$

$$\dot{y}_{p1}=f(e^{-t}-te^{-t})=fe^{-t}(1-t)$$

$$\ddot{y}_{p1}=-fe^{-t}-f(e^{-t}-te^{-t})=fe^{-t}(t-2)$$

$$f(t-2)+3(1-t)f+2ft=1$$

$$t\,\big|\; f-3f+2f=0 \qquad 0=0$$

$$t^0\,\big|\; -2f+3f=1 \qquad f=1$$

$$\boxed{y_{p1}=te^{-t}}$$

y_{p2} — בהמשך

$$y=C_1e^{-t}+C_2e^{-2t}+\underbrace{te^{-t}}_{y_{p1}}+\underbrace{y_{p2}}_{\text{לא מצאנו}}$$

תזכורת:

$\lambda\in\mathbb{R}$ מקרה

$$p\left(\frac{d}{dt}\right)=\underbrace{\left(\frac{d}{dt}-\lambda I\right)^m q\left(\frac{d}{dt}\right)}_{\text{מתחלפים}},\quad q(\lambda)\neq 0$$

$$p\left(\frac{d}{dt}\right)t^m L_{\lambda,k}=b\in L_{\lambda,k} \qquad \text{פולינום}$$

$$q\left(\frac{d}{dt}\right)\left(\frac{d}{dt}-\lambda I_0\right)^m t^m L_{\lambda,k}=q\left(\frac{d}{dt}\right)L_{\lambda,k}$$

$$=L_{\lambda,k}\ni b$$

$$\left(\frac{d}{dt}-\lambda I_0\right)^m:\ e_{\ell}\mapsto e_{\ell-m} \qquad \text{מוריד דרגה}$$

$q\left(\frac{d}{dt}\right)$ לא [illegible] $\qquad \begin{pmatrix}\lambda-\mu & 1 & \\ & \ddots & \ddots \\ & & \lambda-\mu\end{pmatrix}$ nonsingular

(הפיך [illegible]) [illegible] $\qquad \frac{d}{dt}-\mu I_0$

[illegible]

נקודות קריטיות במישור $\mathbb{R}^2$

נק' קריטית, נקודה מיוחדת, נק' ש"מ

equilibrium, singular point, critical point

$$\dot{x} = Ax + B, \quad A\in\mathbb{R}^{2\times 2}, \; B, x\in\mathbb{R}^2$$

נק' קריטית x_0: $Ax_0 + B = 0$

$$(x-x_0)^{\cdot} = A(x-x_0) + \underbrace{Ax_0 + B}_{=0}$$

$$\dot{x} = Ax$$

כאשר $x : x - x_0$

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_2$$

λ_1, λ_2 - שורשים

1. $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ $\quad \lambda_1 \neq \lambda_2$

e_1, e_2 וקטורים עצמיים

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \underbrace{[e_1 \; e_2]}_{E} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = Ez$$

כלומר

$$\dot{x} = E\dot{z} = AEz = [Ae_1, Ae_2]z = E\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

$$E\dot{z} = [\lambda_1 e_1, \lambda_2 e_2]z = E\Lambda z$$

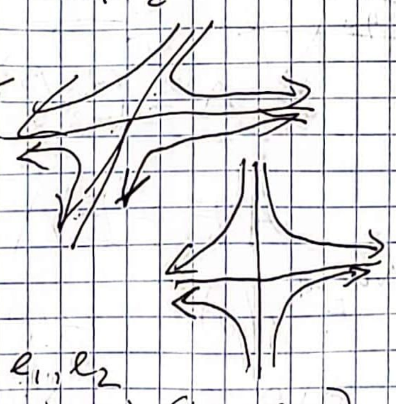
$$\boxed{\dot{z} = \Lambda z} \qquad AE = E\Lambda \qquad \boxed{A = E\Lambda E^{-1}}$$

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \lambda_1 z_1 \\ \dot{z}_2 = \lambda_2 z_2 \end{cases}$$

$\lambda_1\lambda_2 < 0$

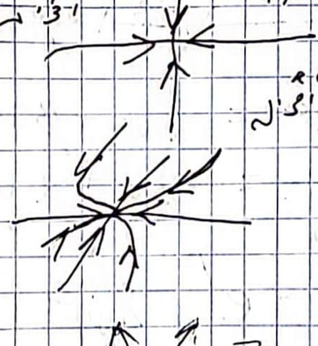
אוכף

saddle point



$\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$ — Knote / nodal point

צומת יציב $\quad \lambda_1, \lambda_2 > 0$



לא יציב $\quad \lambda_1, \lambda_2 < 0$

$\lambda_1 = \lambda_2 \quad e_1, e_2$

$$A(\alpha e_1 + \beta e_2) = \lambda(\alpha e_1 + \beta e_2)$$

כוכב

star

2. ערך עצמי אחד

$$\begin{cases} Ae_1 = \lambda e_1 \\ Ae_2 = \lambda e_2 + e_1 \end{cases}$$

$\Lambda = \begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$, $x = Ez$

צורת Jordan

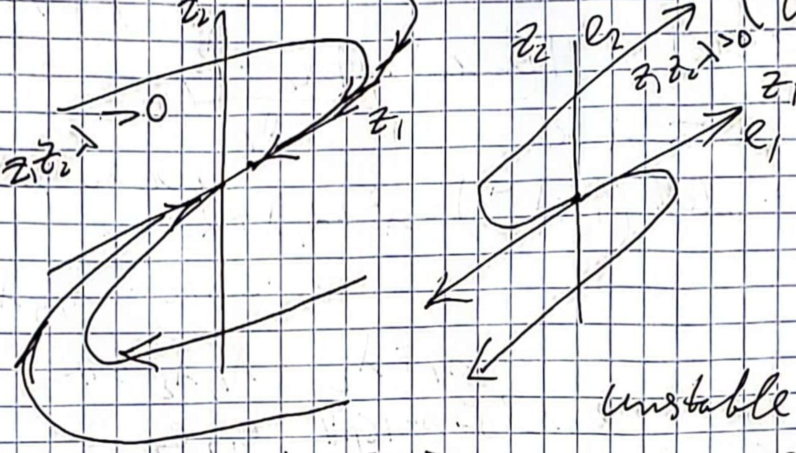
$e_1 \quad e_2 \quad \begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$

$\begin{matrix}1\\0\end{matrix} \quad \begin{matrix}0\\1\end{matrix}$

$\dot{z} = \Lambda z$

$e^{\Lambda t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t}\end{pmatrix}$

7



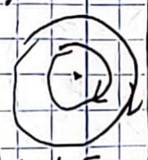
$\lambda > 0$

Improper node
degenerate node
קשר מנוון

unstable לא יציב

$\lambda z_1 z_2 > 0$ [illegible] ל∞ [illegible]

מרכז
$\beta = 0$



center

$\lambda_1 = \overline{\lambda_2} = \alpha + \beta i$, $e_1 = \overline{e_2}$ .3

$(A - \lambda_1 I)e_1 = 0$, $(A - \overline{\lambda_1} I)\overline{e_1} = 0$

$e_1 = u + vi$, $e_2 = u - vi$ $\quad u, v \in \mathbb{R}^2$

$Au + Avi = A(u + vi) = (\alpha + \beta i)(u + vi) = (\alpha u - \beta v) + i(\beta u + \alpha v)$

$Au = \alpha u - \beta v$

$Av = \beta u + \alpha v$

עמודות

$\cancel{A\begin{pmatrix}v\\u\end{pmatrix} \neq \ldots}$ $\quad \cancel{E = \begin{pmatrix}u\\-v\end{pmatrix}}\ (u, v)$

$\cancel{AE = \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\beta & \alpha\end{pmatrix}E}$ $\quad \cancel{E\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\beta & \alpha\end{pmatrix}}$, $A = E\Lambda E^{-1}$

$\Lambda = \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\beta & \alpha\end{pmatrix}$, $E = \boxed{-v, u}$

עמודות

$$\begin{cases} Av = \alpha v + \beta u \\ Au = -\beta v + \alpha u \end{cases}$$

$AE = E\Lambda$, $A = E\Lambda E^{-1}$

$Ez = x = e^{At}x(0) = Ee^{\Lambda t}E^{-1}x(0)$ $\qquad z(t) = e^{\alpha t}\cancel{(\cos\beta t, \sin\beta t)}$

$= e^{\alpha t}\begin{pmatrix}\cos\beta t & \sin\beta t\\ -\sin\beta t & \cos\beta t\end{pmatrix} z(0)$

focus
focal point $\alpha > 0$ $\qquad$ $\alpha < 0$

מוקד $\qquad$ sink stable

טוב מאוד!

1.
$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - 2 & x_0 = 1 \\ \dot{y} = x + y & y_0 = -1 \end{cases},\quad p(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda-2)(\lambda-1)$$

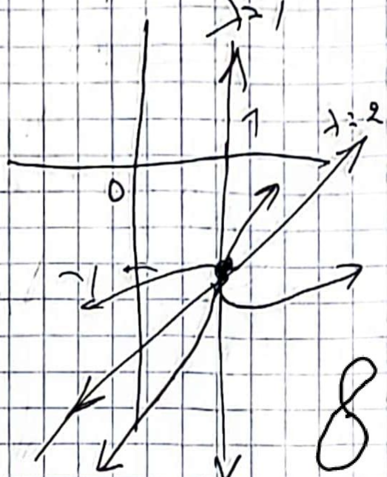
$\lambda = 1$ $\quad (2-1)x = 0 \quad x = 0$ $\quad x = 0 \quad e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda = 2$ $\quad (2-2)x = 0$

$x + (1-2)y = 0 \quad e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$x = y$

קשר לא יציב



8

2.
$$\begin{cases} \dot{x} = x - 2y \\ \dot{y} = 4x - 3y \end{cases} \quad p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 5$$

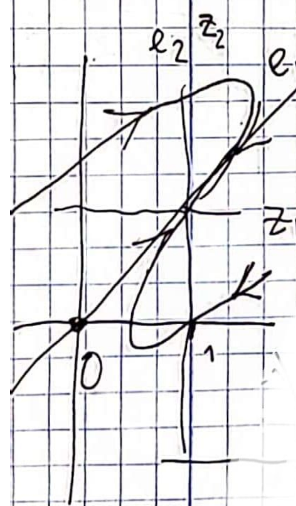
$\lambda_{1,2} = -1 \pm 2i$

מוקד יציב

[illegible]

3.
$$\begin{cases} \dot{x} = -3x + 2y + 1 \\ \dot{y} = -2x + y + 1 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1, \quad \lambda_{1,2} = -1$



$\lambda = -1$ $\quad \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{x=0} e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$\left(e_2 \in \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \alpha \cdot e_1 \quad \alpha \in \mathbb{R} \right)$

קשר מנוון

יציב

Petrovsky, ODE ‏מיון לא לינארי

$$\dot{x} = f(x),\quad x\in\mathbb{R}^2,\quad f(x_0)=0$$

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0) = f'(x_0),\quad \det(f'(x_0)-\lambda I) = \lambda^2+a\lambda+b,\quad a,b\in\mathbb{R},\ 0\neq b=\det A$$

במישור

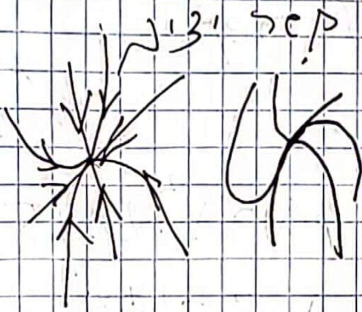
שורשים $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\,\lambda_1, \mathrm{Re}\,\lambda_2\neq 0$

$\lambda_1,\lambda_2>0$, $\neq$

קשר לא יציב

$\lambda_1,\lambda_2<0$

קשר יציב



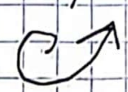
לקשר
מנוון
אין
מספיק
יציבויות

$\lambda_1<0<\lambda_2$

אוכף

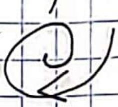
$\mathrm{Re}\,\lambda_{1,2}>0$ $\boxed{\mathrm{Im}\,\lambda_{1,2}\neq 0}$

מוקד לא יציב



$\mathrm{Re}\,\lambda_{1,2}<0$

מוקד יציב



$\lambda_1=\bar{\lambda}_2\neq 0$

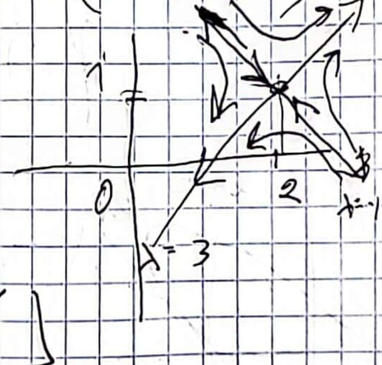
דוגמא

$$\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix} = \begin{matrix} x+2y-4\\ 2x+y-5\end{matrix},\quad \begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix},\quad p(\lambda)=\lambda^2-2\lambda-3=(\lambda-3)(\lambda+1)$$

$\lambda=3$ $\quad -2x+2y=0$ $\quad e_1=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$

$\lambda=-1$ $\quad 2x+2y=0$ $\quad e_2=\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$

$\boxed{\text{אוכף}}$

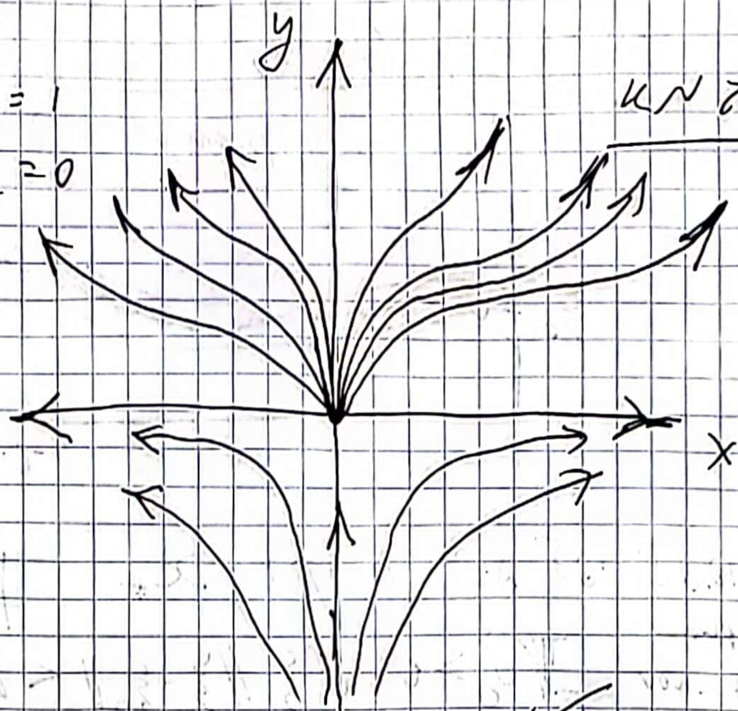


$\dot{x} = x \qquad \lambda_1 = 1$

$\dot{y} = y^2 \qquad \lambda_2 = 0$

אוכף-קשר

saddle node



לוגתא

10

לוגתא

$\dot{x} = -xy$

$\dot{y} = \frac{1}{2}x - y^2$