פתרון בעזרת טורי חזקות

דוגמאות לתזכורת

$$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \dots$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \dots \qquad \sin t = \frac{t}{1!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots$$

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \dots \qquad \frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + \dots$$

1

דוגמא

$$\ddot{x} + \cos t\, \dot{x} - x = t^2 \qquad x(0) = 1,\ \dot{x}(0) = 0$$

$$x(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3 + \alpha_4 t^4 + o(t^4)$$

$$\alpha_i = ? \qquad i = 0,1,2,3,4$$

להעריך את השארית R בגבול,

$$x = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3 + R(t), \quad R = O(t^4)$$

בגבול,

$$|t| \le \varepsilon \Rightarrow |R(t)| \le M|t|^4$$

$$M = ?, \quad \varepsilon = ?$$

$$x = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3 + \alpha_4 t^4 + \dots \qquad \alpha_0 = 1$$

$$\dot{x} = \alpha_1 + 2\alpha_2 t + 3\alpha_3 t^2 + 4\alpha_4 t^3 + \dots \qquad \alpha_1 = 0$$

$$\ddot{x} = 2\alpha_2 + 6\alpha_3 t + 12\alpha_4 t^2 + \dots$$

$$2\alpha_2 + 6\alpha_3 t + 12\alpha_4 t^2 + \dots + \left(1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} - \dots\right)\left(\alpha_1 + 2\alpha_2 t + 3\alpha_3 t^2 + \dots\right)$$

$$-\left(\alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \dots\right) = t^2$$

$$\begin{array}{l|l} t^0 & 2\alpha_2 + \alpha_1 - \alpha_0 = 0 \\ t^1 & 6\alpha_3 + 2\alpha_2 - \alpha_1 = 0 \\ t^2 & 12\alpha_4 - \frac{\alpha_1}{2} + 3\alpha_3 - \alpha_2 = 1 \end{array}$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2}(-\overset{0}{\alpha_1} + \overset{1}{\alpha_0}) = \frac{1}{2}$$

$$\alpha_3 = -\frac{1}{3}\alpha_2 + \frac{1}{6}\alpha_1 = -\frac{1}{6}$$

$$\alpha_4 = \frac{1}{12}\left(1 + \frac{1}{2}\alpha_1 + \alpha_2 - 3\alpha_3\right)$$

$$= \frac{1}{12}\left(1 + \frac{1}{2} + 3\cdot\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6}$$

$$x = 1 + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{6}t^4 + o(t^4)$$

רו(3)את, 6

<u>המשך הערכת השארית</u> 2

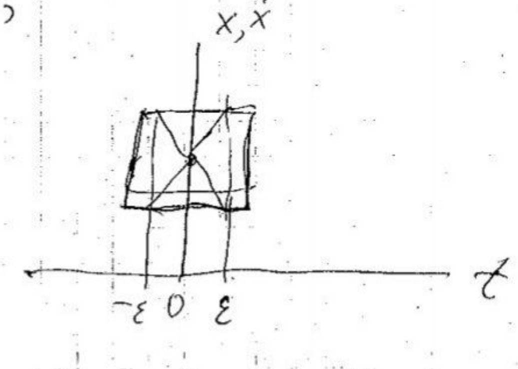
$x(t) = 1 - \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{6}t^3 + R(t)$, $R(t) = O(t^4)$ ידוע

$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : \forall |t| \le \varepsilon \quad |R(t)| \le M t^4$, $M, \varepsilon - ?$

נוסחת שארית טיילור בצורת לגרנז' Lagrange

$$R(t) = \frac{x^{(4)}(\theta t)}{4!} t^4, \quad \theta \in (0,1)$$

$$M \ge \max_{[-\varepsilon, \varepsilon]} \frac{x^{(4)}}{24},$$



$$\ddot{x} = f(t, x, \dot{x})$$

$$\Omega = \left\{ (t, x, \dot{x}) \;\middle|\; \begin{array}{l} |t| \le 2 \\ |x| \le 2 \\ |\dot{x}| \le 1 \end{array} \right\}$$

אפשר להאריך את הפתרון עד שפת Ω

נעריך את הזמן שאוכל המסלול לא עוזב את Ω.

1. $x(t) = \overset{1}{x(t_0)} + \int_{t_0}^{t} \dot{x}(t)\,dt$

$$|x(t)| \le |x(t_0)| + \left|\int_{t_0}^{t} \dot{x}(t)\,dt\right| \le 1 + |t - t_0| \max_{\Omega} |\dot{x}| = 1 + |t - t_0| = 1 + |t|$$

צריך ש $|x| \le 2$ ⇐ $|t| \le 1$ מבטיח את זה

2. $\dot{x}(t) = \overset{0}{\dot{x}(t_0)} + \int_{t_0}^{t} \ddot{x}(t)\,dt$, $\dot{x}(t) \le |\dot{x}(t_0)| + |t - t_0| \max_{\Omega} |\ddot{x}|$

$$\max_{\Omega} |\ddot{x}| = \max_{\Omega} |-\cos t \cdot \dot{x} + x + t^2| \le 1 \cdot 1 + 2 + 4 \le 8$$

$$|\dot{x}| \le |t| \cdot 8 \Rightarrow |\dot{x}| \le 1$$

מבטיח שנשארת ב-Ω

$1, 2 \Rightarrow \overline{|t| \le \frac{1}{8}}$ אז $|t| \le \frac{1}{8}$ המסלול לא עוזב את Ω

$\varepsilon > \frac{1}{8}$: (נבחר

אסור לס"ק !

$$\Omega_1 = \begin{cases} |t| \le \varepsilon = \frac{1}{8} \\ |x| \le 2 \\ |\ddot{x}| \le 1 \end{cases} \Longrightarrow$$

(לא חייבים)

או $|x| \le 1 + \frac{1}{8}$

"Ω_2"

לא נגסכ, את זה

$$|\dddot{x}| \le \max_{\Omega_1} |\dddot{x}| \le 1 \cdot 1 + 2 + \left(\frac{1}{8}\right)^2 \le 4$$

$$\dddot{x} = \sin t \cdot \dot{x} - \cos t \cdot \ddot{x} + \dot{x} + 2t$$

$$|\dddot{x}| \le 1 \cdot 1 + 1 \cdot 4 + 1 + \frac{1}{4} \le 7$$

$$x^{IV} = \cos t \, \dot{x} + 2 \sin t \, \ddot{x} - \cos t \, \dddot{x} + \ddot{x} + 2$$

$$|x^{IV}| \le 1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 7 + 4 + 2 = 1 + 8 + 7 + 6 = 22$$

$$M = \frac{\max_{|t| \le \varepsilon} |x^{IV}|}{4!} = \frac{22}{24} \le 1 \;, \quad M = 1$$ הוכחנו:

$$\ddot{x} = 1 + \frac{1}{2} t^2 - \frac{1}{6} t^3 + R(t), \quad |t| \le \frac{1}{8} \Rightarrow |R(t)| \le t^4$$

פתרון

$\dot{x}=Ax$

כאשר: $x(t)=e^{At}x(0)$ ⇐

אקספוננט של מטריצה

Matrix exponential

תזכורת: $\|x\|=(x^T\cdot x)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}$

מודול, אורך

$$\|A\|=\sup\frac{\|Ax\|}{\|x\|}=\max_{\|x\|=1}\|Ax\|$$

$$\|A\|=\left[\lambda_{max}(A^*A)\right]^{\frac{1}{2}} \qquad A^*=\bar{A}^T=A^T$$

ממשי ≥ 0 צמוד של הרמיטי

$$\|AB\|\leq\|A\|\|B\| \quad , \quad \|A+B\|\leq\|A\|+\|B\|$$

הגדרה

$$e^A=I+\frac{A}{1!}+\frac{A^2}{2!}+\dots$$

משפט הטור מתכנס במידה שווה ובהחלט בכל קטע $\|A\|\leq R$

הוכחה: $\left\|\frac{A^k}{k!}\right\|\leq\frac{R^k}{k!}$, $\sum_k\frac{R^k}{k!}<\infty$

משפט

$$\frac{d}{dt}e^{(At)}=Ae^{At}$$

$$Ae^{At}=A\left(I+\frac{At}{1!}+\frac{A^2t^2}{2!}+\right)$$

טור מתכנס במידה שווה

$$I+\int_0^t Ae^{At}dt=I+\int_0^t \frac{A^2t}{1!}+\frac{1}{2!}A^3t^2+\dots dt=$$

$$=I+\frac{At}{1!}+\frac{A^2t^2}{2!}+\dots$$

מתכנס ב $t=0$

⇐ מתכנס במידה שווה

$e^{At}=$ טור של אנליטיים

$$\Rightarrow\boxed{\begin{cases}\dot{x}=Ax\\ x(t_0)=e^{A(t-t_0)}x(t_0)\end{cases}}$$

משפט

$$e^{A+B}=e^Ae^B \Leftarrow AB=BA$$

תכונות

5

$$\exp(KAK^{-1}) = Ke^{A}K^{-1}$$

$$(KAK^{-1})^m = KAK^{-1}KAK^{-1}\cdots KAK^{-1} = KA^mK^{-1}$$

$$\exp\left(\begin{array}{c|c} A & \\ \hline & B \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} e^A & \\ \hline & e^B \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right)^m = \begin{pmatrix} A^m & 0 \\ 0 & B^m \end{pmatrix}$$ כי

3 דרכים לחשב אקספוננט, $e^{A} = e^{A\cdot 1}$, e^{At}

1. ישירות

2. להעביר לצורת Jordan

$$\exp\left[\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \lambda & \ddots \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix} t\right] = \exp(\lambda t I + t\Delta), \quad \Delta = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}}_{n}$$

$$= e^{\lambda t} e^{\Delta t} = e^{\lambda t}\begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & t & \frac{t^2}{2!} \\ & & & 1 & t \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Delta^0 = I, \quad \Delta^k = \begin{pmatrix} 0 & \overset{k}{\longleftrightarrow} & 1 & & \\ & \ddots & & \ddots & \\ & & \ddots & & 1 \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta^{n-1} = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & & \\ & & \end{pmatrix}, \quad \Delta^n = 0$$

3. לפתור $\dot{x} = Ax$

נבחר מטריצה יסודית $\Phi(t)$

$$\dot{\Phi} = A\Phi, \quad \det K \neq 0,\ K = \text{const} \Rightarrow (\Phi K)^{\cdot} = A\underbrace{\Phi K}_{\text{גם יסודית}}$$

$\Phi_*(t) = e^{At}$ — מטריצה יסודית

$\Phi_*(0) = I$ — מנורמלת

$$\Rightarrow \boxed{e^{At} = \Phi(t)\Phi^{-1}(0)}$$

[illegible] 6

$$e^{\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\beta & \alpha\end{pmatrix}t} = ?$$

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\beta & \alpha\end{pmatrix} = \alpha I + \beta \underbrace{\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}}_{J}$$

צורת
Jordan
מרוכבת

$$e^{\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\beta & \alpha\end{pmatrix}t} = \begin{pmatrix}e^{\alpha t} & 0\\ 0 & e^{\alpha t}\end{pmatrix} e^{\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\beta t} \longrightarrow \begin{pmatrix} i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix}$$

ישר

שני פרקים:

א.

$$\begin{tikzcd}
 & I \arrow[dr, "J"] & \\
-J \arrow[ur, "J"] & & J \arrow[dl, "J"] \\
 & -I \arrow[ul, "J"] &
\end{tikzcd}$$

$$J^2 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$-I \qquad -J \qquad I$$
$$\parallel \qquad \parallel \qquad \parallel$$

$$e^{\beta J t} = I + \frac{\beta t}{1!}J + \frac{\beta^2 t^2}{2!}J^2 + \frac{\beta^3 t^3}{3!}J^3 + \frac{\beta^4 t^4}{4!}J^4 + \dots$$

$$= \left(1 - \frac{\beta^2 t^2}{2!} + \frac{\beta^4 t^4}{4!} - \dots\right)I + \left(\frac{\beta t}{1!} - \frac{\beta^3 t^3}{3!} + \dots\right)J$$

$$= \cos(\beta t)\, I + \sin(\beta t)\, J = \begin{pmatrix}\cos\beta t, & \sin\beta t\\ -\sin\beta t, & \cos\beta t\end{pmatrix}$$

$y_1' = \beta y_2$
$y_2' = -\beta y_1$

$$y_1'' + \beta^2 y_1 = 0 \qquad \boxed{\begin{aligned} y_1 &= c_1\cos\beta t + c_2 \sin\beta t\\ y_2 &= \frac{1}{\beta}y_1' = -c_1\sin\beta t + c_2\cos\beta t\end{aligned}}$$

ב.

$$\lambda^2 + \beta^2 = 0 \implies \lambda = \pm \beta i$$

$\lambda = -\beta i$

$$\begin{pmatrix}+\beta i & \beta\\ -\beta & +\beta i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\end{pmatrix} = 0 \qquad \begin{aligned}\beta i z_1 + \beta z_2 &= 0\\ -\beta i z_1 - \beta z_2 &= 0\end{aligned} \qquad e_1 = \begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix}$$

$$e_2 = \overline{e_1} = \begin{pmatrix}1\\ +i\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}e^{-i\beta t}$$

[illegible]

$$= \begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix}\left(\cos\beta t - i\sin\beta t\right) = \begin{pmatrix}\cos t - i\sin t\\ -\sin t - i\cos t\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Re}\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\beta t\\ -\sin\beta t\end{pmatrix}, \quad \mathrm{Im}\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sin\beta t\\ \cos\beta t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\beta t\\ -\sin\beta t\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\sin\beta t\\ \cos\beta t\end{pmatrix} i$$

[illegible]

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix}\cos\beta t\\ -\sin\beta t\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}\sin\beta t\\ \cos\beta t\end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

(א' I)

מטריצה יסודית $\Phi = \begin{pmatrix} \cos\beta t & \sin\beta t \\ -\sin\beta t & \cos\beta t \end{pmatrix}$ 7

$$\Phi(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow e^{BJt} = \Phi(t)\Phi(0)^{-1} = \Phi(t)$$

דוגמא

$\lambda \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$

$$e^{\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{t^2}{2}e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}$$

$$\exp\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \exp\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e & e & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^2 & e^2 \\ 0 & 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix}$$

$$\exp\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \exp\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \exp\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

דוגמא 2

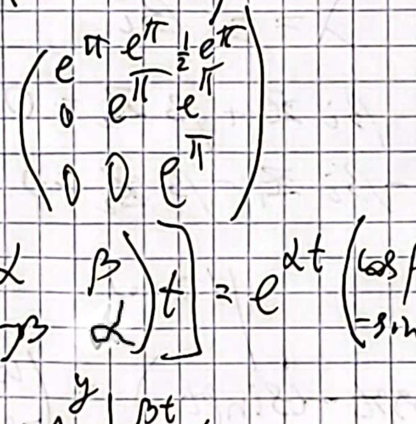
$$\exp\begin{pmatrix} \pi & 1 & 0 \\ 0 & \pi & 1 \\ 0 & 0 & \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\pi} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\pi} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\pi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{\pi} & e^{\pi} & \frac{1}{2}e^{\pi} \\ 0 & e^{\pi} & e^{\pi} \\ 0 & 0 & e^{\pi} \end{pmatrix}$$

הגדרה

$$\exp\left[\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} t\right] = e^{\alpha t}\begin{pmatrix} \cos\beta t & \sin\beta t \\ -\sin\beta t & \cos\beta t \end{pmatrix}$$

$$\dot{x} = \alpha x + \beta y$$
$$\dot{y} = -\beta x + \alpha y$$



סיבוב ומתיחה

8

וריאציית המקדמים:

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)$$

$$X = X_h + x_p, \quad X_h: \quad x_h = \Phi(t)C$$

מטריצה יסודית

$$x_h = \underbrace{\begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \cdots & \varphi_n(t) \end{pmatrix}}_{\Phi(t)} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = c_1\varphi_1(t) + \dots + c_n\varphi_n(t)$$

$$\dot{\Phi} = A(t)\Phi$$

מחפשים פתרון פרטי בצורה,

$$x_p = \Phi(t)\tilde{C}(t), \quad \tilde{C} \in C^1$$

$$\left.\begin{aligned} &\dot{\Phi}\tilde{C} + \Phi\dot{\tilde{C}} = A(t)\Phi\tilde{C} + B(t) \\ &\dot{\Phi}\tilde{C} = A(t)\Phi\tilde{C} \end{aligned}\right] \Rightarrow \Phi\dot{\tilde{C}} = B(t)$$

$$\dot{\tilde{C}} = B(t)\Phi(t)^{-1}$$

$$\tilde{C}(t) = \int_{t_0}^{t} B(s)\Phi(s)^{-1}\,ds + \tilde{C} \to 0$$

$$x(t) = \underbrace{\Phi(t)C}_{X_h} + \underbrace{\Phi(t)\int_{t_0}^{t} B(s)\Phi(s)^{-1}\,ds}_{X_p}$$

דוגמא

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_h = \begin{pmatrix} e^t\cos t \\ -e^t\sin t \end{pmatrix}c_1 + \begin{pmatrix} e^t\sin t \\ e^t\cos t \end{pmatrix}c_2 + x_p, \quad x_p = \begin{pmatrix} \ \end{pmatrix}\tilde{c}_1 + \begin{pmatrix} \ \end{pmatrix}\tilde{c}_2$$

$$\begin{cases} \cancel{e^t}\cos t\,\dot{\tilde{c}}_1 + \cancel{e^t}\sin t\,\dot{\tilde{c}}_2 = \cancel{e^t}\ 1 \\ \cancel{e^t}(-\sin t)\,\dot{\tilde{c}}_1 + \cancel{e^t}\cos t\,\dot{\tilde{c}}_2 = 0 \end{cases}$$

$$\dot{\tilde{c}}_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \sin t \\ 0 & \cos t \end{vmatrix}}{\cos^2 t + \sin^2 t} = \cos t, \quad \tilde{c}_1 = \sin t, \quad x_p = \begin{pmatrix} 0 \\ -e^t \end{pmatrix}$$

$$\dot{\tilde{c}}_2 = \frac{\begin{pmatrix} \cos t & 1 \\ -\sin t & 0 \end{pmatrix}}{1} = \sin t, \quad \tilde{c}_1 = -\cos t$$

קוו'ז פולינומים , Quasi polynomials

$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\dots+a_ny=0\,,\quad a_1\dots a_n\in\mathbb{R}\ (\mathbb{C}\ \text{או})$

$y\in\mathbb{R}$

$\dot{\vec{y}}=A\vec{y}\,,\quad A=\begin{pmatrix}0&1&&\\ \vdots&&\ddots&\\ 0&&&1\\ -a_n&\dots&&-a_1\end{pmatrix}$

טענה!

$\det(A-\lambda I)=(-1)^n(\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\dots+a_n)$

הוכחה:

$\det\begin{pmatrix}-\lambda&1&&\\ 0&-\lambda&\ddots&\\ \vdots&&\ddots&1\\ -a_n&-a_{n-1}&\dots&-a_1-\lambda\end{pmatrix}=-\lambda(-1)^{n-1}(\lambda^{n-1}+a_1\lambda^{n-2}+\dots+a_{n-1})+(-1)^{(n-1)}(-a_n)\cdot 1$

אינדוקציה

מ.ש.ל.

טענה: לכל ערך עצמי λ יש רק וקטור עצמי אחד

האמת נגיד

$A\xi=\lambda\xi \qquad \xi=\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix}$

$\Rightarrow\ \xi_2=\lambda\xi_1\,,\ \xi_3=\lambda\xi_2=\lambda^2\xi_1\,,\ \dots\ \Rightarrow\ \xi=\xi_1\begin{pmatrix}1\\ \lambda\\ \vdots\\ \lambda^{n-1}\end{pmatrix},\ \xi_1\neq 0$

אפשר לקחת $\xi_1=1$ מ.ש.ל.

$\Leftarrow$ לכן [illegible]

$p(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{m_1}\cdots(\lambda-\lambda_k)^{m_k}\,,\quad \lambda_1\dots\lambda_k\in\mathbb{R}\ (\mathbb{C})$

$m_1\dots m_k\in\mathbb{N}$ multiplicities

ריבויים

$p\left(\frac{d}{dt}\right)=\left(\left(\frac{d}{dt}\right)^n+a_1\left(\frac{d}{dt}\right)^{n-1}+\dots+a_nI_G\right)$

$p\left(\frac{d}{dt}\right)y=0 \qquad I_G: f(\cdot)\longmapsto f(\cdot)$

אופרטור היחידה

[illegible]