# הרצאה 5

1

מד"ר סקלרי,

$$y^{(n)}+a_1(t)y^{(n-1)}+\dots+a_n(t)y=0\ ,\quad \vec{y}=\begin{pmatrix} y\\ \dot y\\ \vdots\\ y^{(n-1)}\end{pmatrix}$$

$f_1(t),\dots,f_n(t):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פתרונות

(אם $\mathbb{R}\to\mathbb{C}$)

$$\Rightarrow\quad \dot{\vec{y}}=A(t)\vec{y}\ ,\quad A(t)=\begin{pmatrix}0&1&&0&0\\0&0&1&0&0\\&&\ddots&\ddots&\\0&0&&0&1\\-a_n&-a_{n-1}&&&-a_1\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Tr}\,A(t)=-a_1(t)$$

$$\boxed{\dot W=-a_1(t)\,W}$$

$$W=\det\varphi=\det\begin{pmatrix}f_1&\cdots&f_n\\ \vdots&&\vdots\\ f_1^{(n-1)}&\cdots&f_n^{(n-1)}\end{pmatrix}$$

$$\boxed{W(t)=W(t_0)\,e^{-\int_{t_0}^{t}a_1(s)\,ds}}$$

**אבחנה:** זה רק אם $\neq 0$

---

$$\ddot y+a(t)\dot y+b(t)y=0\ ,$$

פתרון פרטי, ידוע: $f(t)$

נמצא את הכללי

$$\begin{vmatrix} f(t) & y\\ \dot f(t) & \dot y\end{vmatrix}=C_1\underbrace{e^{-\int_{t_0}^{t}a(s)\,ds}}_{\alpha(t)}$$

$$-y\dot f+\dot y f=C_1\,\alpha(t)\qquad /f^2\ ,\quad f^2\neq 0$$

$$\left(\frac{y}{f}\right)^{\cdot}=\frac{\dot y f-y\dot f}{f^2}=C_1\frac{\alpha(t)}{f(t)^2}$$

$$y=C_1 f\Big(\underbrace{\int_{t_0}^{t}\alpha(s)\,ds}_{[illegible]}+C_2\Big)$$

דוגמא

$x, y \in \mathbb{R}$

**2**

$$\begin{cases} \dot{x} = (1+e^{-t}-te^{-t})x + (te^{-t}-e^{-t})y \\ \dot{y} = (e^{-t}-te^{-t})x + (1+te^{-t}-e^{-t})y \end{cases}$$

נתון פתרון פרטי: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}$

לפתור את המערכת

$\mathrm{Tr}\,A = 2$ $\quad \det\begin{pmatrix} e^t & x \\ e^t & y \end{pmatrix} = ce^{2t}$

ניקח $c=1$ נקבל פתרון פרטי נוסף (בלתי תלוי)

$$e^t y - e^t x = e^{2t}$$

$$\Rightarrow y = e^t + x$$

מציבים במערכת (1)

$$\dot{x} = (1+e^{-t}-te^{-t})x + (te^{-t}-e^{-t})(e^t + x)$$

$$= x + t - 1$$

$\dot{x} - x = t - 1$ $\qquad x_p = c(t)e^t$

$\dot{c}e^t = t - 1 \Rightarrow \dot{c} = te^{-t} - e^{-t} = (-te^{-t})'$

$c = -te^{-t} + c_1^{0}$ $\qquad x_p = -te^{-t}e^t = (-t + c_1e^t)$

$y_p = e^t + x_p = e^t - t\ (+c_1e^t)$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ e^t - t \end{pmatrix} \left(+c_1\begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}\right)$$

בדיקה: נכון

אבל לא תואמים

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \tilde{C}_1\begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix} + \tilde{C}_2\begin{pmatrix} -t \\ e^t - t \end{pmatrix}$$

$(t^2+1)\ddot{x} - 2t\dot{x} + 2x = 0$ $\quad \varphi = t$ [illegible] $\quad$ **דוגמא**

$$\begin{vmatrix} t & x \\ 1 & \dot{x} \end{vmatrix} = C_1 e^{\int_0^t \frac{2t}{t^2+1}dt} = C_1 e^{\ln(t^2+1)} = C_1(t^2+1)$$

3

$$\left(\frac{x}{t}\right)^{\cdot} = C_1 \frac{t^2+1}{t^2}$$

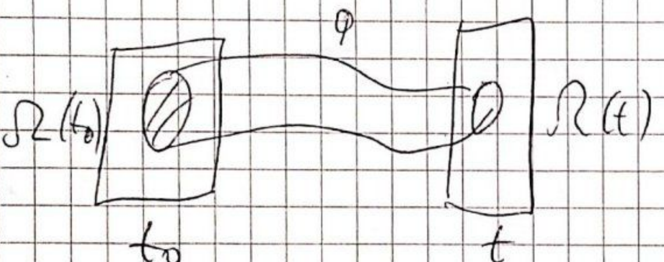
$$\frac{x}{t} = C_1 \int \left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt = C_1\left(t-\frac{1}{t}\right) + \overbrace{C_1 \tilde{C}_2}^{C_2}$$

$$x = C_1(t^2-1) + C_2 t$$

## משפט ליאוויל הכללי

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) & f \in C^k \\ x(t_0) = x_0 & x = \varphi(t, t_0, x_0) \in C^k \end{cases}$$

$V(t)$ נפח




$$\dot{V}(t) = \int_{\Omega(t)} \sum \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_1 \ldots dx_n \qquad \underline{\text{משפט}}$$

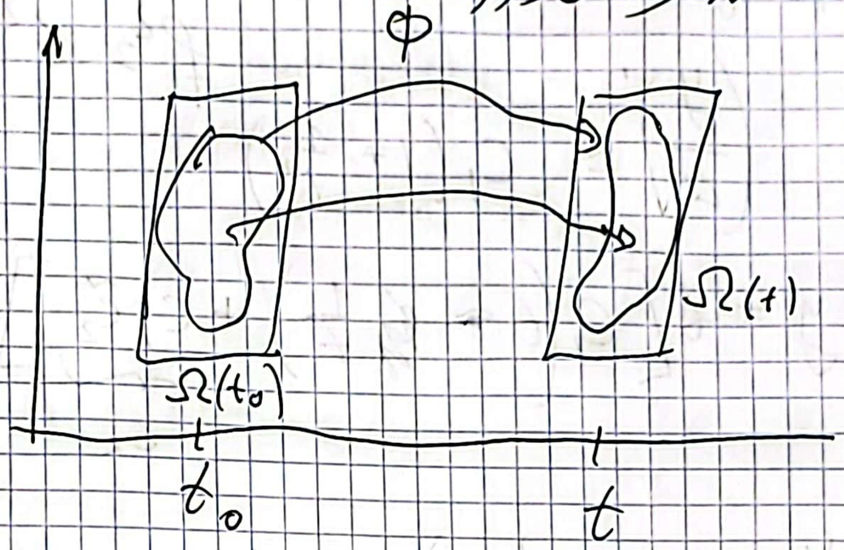
$$= \int_{\Omega(t)} \mathrm{Tr}\frac{\partial f}{\partial x} dx_1 \ldots dx_n = \int_{\Omega(t)} \mathrm{div} f \, dx_1 \ldots dx_n$$

מה קורה במקרה כללי?

$$\dot{x} = f(t,x) = \begin{pmatrix} f_1(t,x) \\ \vdots \\ f_n(t,x) \end{pmatrix}, \quad f \in C^1$$

$$x(t_0) = x_0 \qquad x = \Phi(t, t_0, x_0) \in C^1$$

[illegible]




compact

$\Omega(t_0) \subset \mathbb{R}^n$

$\Omega(t) \subset \mathbb{R}^n$

$$V(t) = \int_{\Omega(t)} dx_1\, dx_2 \cdots dx_n \overset{?}{=}$$

**משפט ליוביל (Arnold)**

$$\dot{V}(t) = \int_{\Omega(t)} \sum \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(t,x)\, dx_1 \cdots dx_n$$

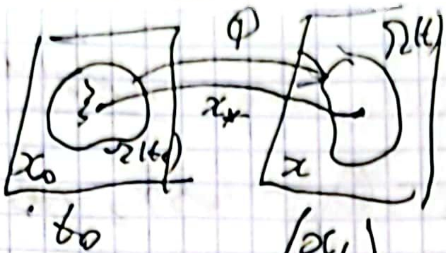
divergence

$$= \int_{\Omega(t)} \mathrm{Tr}\, \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\, dx_1 \cdots dx_n = \int_{\Omega(t)} \mathrm{div}_x f(t,x)\, dx_1 \cdots dx_n$$

במקרה הליניארי: $\dot{x} = A(t)x$

$\mathrm{div}_x A(t)x = \mathrm{Tr}\, A(t)$ , $\dot{V} = \mathrm{Tr}\, A(t)\, V$

לא משנה סימן: $W(t)$ $\qquad V(t) = |W(t)|$




## הוכחת המשפט

5

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\quad x_0=\begin{pmatrix}x_{01}\\\vdots\\x_{0n}\end{pmatrix}$$ נסמן

$x_0=\xi$ נג' לפי התנאי ההת'

$$x=x(t,\xi)=\varphi(t,\xi)$$

$$x_*(t)=\varphi(t,\xi)$$ נסמן $\left(x_1(t,x_0),\dots,x_n(t,x_0)\right)^T\in\mathbb{R}^n$

$$\dot{x}=f(t,x)$$

$$\underset{\varphi(t,x_0)}{x(t,x_0)}=x_*(t)+\Delta x(t,x_0)=x_*(t)+\varphi'_{x_0}(t,\xi)\Delta x_0+o(\|\Delta x_0\|)$$

נגזור לפי $x_0$ ונציב $x_0=\xi$

$$\frac{\partial^2}{\partial t\,\partial x_0}x(t,\xi)=\left(\frac{\partial x}{\partial x_0}\right)^{\cdot}\Bigg|_{(t,\xi)}=\frac{\partial f}{\partial x}(t,x(t,\xi))\frac{\partial x}{\partial x_0}(t,\xi)$$

$Z\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $Z(t)=\frac{\partial x}{\partial x_0}(t,\xi)$ נסמן, $Z(t_0)=I$

$$\dot{Z}=\frac{\partial f}{\partial x}(t,x_*(t))Z,\quad Z=\left(\frac{\partial x}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial x}{\partial x_n}\right)_{(t,\xi)}$$ מטריצה

$$\underset{x(t,\Delta x(t_0))}{x(t)}=x_*(t)+Z(t)\Delta x(t_0)+o(\|\Delta x(t_0)\|)$$

$$V(t)=\int_{\Omega(t)}dx_1\dots dx_n=\int_{\Omega(t_0)}\left|\det\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}(t,x_0)\right|dx_{01}\dots dx_{0n}$$

Jacobian

~~[illegible]~~

$$\frac{\partial x}{\partial x_0}=\frac{\partial\Delta x_i(t)}{\partial x_0}$$ נסמן

$$Z(t)=\frac{\partial\Delta x}{\partial x_0}(t,\xi)=\left(\frac{\partial\Delta x}{\partial x_{01}},\dots,\frac{\partial\Delta x}{\partial x_{0n}}\right)(t,\xi)$$

$$Z(t_0)=I\quad Z(t)=(\xi_1(t),\dots,\xi_n(t)),\ \xi_j(t_0)=1$$ מטריצה

משוואת הוריאציות $z$, $\dot{\xi} = \frac{\partial f}{\partial x}(t, \underset{\varphi(t,x_0)}{x_*(t)})\xi$, $\xi \in \mathbb{R}^n$; $\xi_j(t_0) = e_j$

Linear Homogeneous DE $\quad \xi_j = \frac{\partial \varphi}{\partial x_{0j}}(t, x_0)$

מטריצה יסודית של משוואת הוריאציות $\quad \dot{\varphi} = f(t, \varphi(t, x_0))$

לאורך הפתרון $x_*(t)$ $\quad \varphi(t_0, x_0) = x_0$

לאורך הפתרון $x_*$ $\quad W(t, \xi) = W[\xi_1, \dots, \xi_n](t)$, $W(t_0, \xi) = I$

$W(t_0, x_0) = I$ $\quad \Rightarrow W > 0$ רציפות

$0 < W(t, x_0) = \left|\det\left(\frac{\partial}{\partial x_0}\varphi(t, x_0)\right)\right|$ [illegible]

$$V(t) = \int_{\Omega(t_0)} W(t, x_0)\, dx_{01} \dots dx_{0n} = \int_{\Omega(t_0)} W\, dx_{01} \dots dx_{0n}$$

$$\dot{V}(t) = \int_{\Omega(t_0)} \dot{W}(t, x_0)\, dx_{01} \dots dx_{0n}$$

Abel: $\quad \varphi(t_0, x_0) = x_0$

$$\dot{W}(t, x_0) = \mathrm{Tr}\, \frac{\partial f}{\partial x}(t, \varphi(t, x_0)) \cdot W(t, x_0), \quad W(t_0, x_0) = 1$$

[illegible] $t = t_0$: $\quad \dot{V}(t_0) = \int_{\Omega(t_0)} \dot{W}(t_0, x_0)\, dx_{01} \dots dx_{0n}$

$\det I = W(t_0, x_0) = 1$

$\forall t_0$: $\quad \dot{V}(t_0) = \int_{\Omega(t_0)} \sum_j \frac{\partial f_j}{\partial x_j}(t_0, x_0)\, dx_{01} \dots dx_{0n}$

[illegible]

6

עוד הפעם

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega(t)} dx_1 \dots dx_n = \frac{d}{dt}\int_{\Omega(t_0)} \underbrace{W\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x_{0_1}} \dots \frac{\partial\varphi}{\partial x_{0_n}}\right]}_{>0} dx_{0_1}\dots dx_{0_n}$$

$$= \int_{\Omega(t_0)} \operatorname{Tr}\frac{\partial f}{\partial x}(t, \varphi(t, x_0)) W(t, x_0)\, dx_{0_1}\dots dx_{0_n}$$

נציב $t = t_0$

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0} \int_{\Omega(t)} dx_1 \dots dx_n = \int_{\Omega(t_0)} \overbrace{\operatorname{Tr}\frac{\partial f}{\partial x}(t_0, x_0)}^{\operatorname{div} f(t_0, x_0)} \cdot 1 \; dx_{0_1}\dots dx_{0_n}$$

$$\forall t_0 \Rightarrow \forall t: \; \frac{d}{dt}\int_{\Omega(t)} dx_1 \dots dx_n = \int_{\Omega(t)} \operatorname{div} f(t,x)\, dx_1 \dots dx_n$$

דוגמא

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 x_3 - x_1 t \\ \dot{x}_2 = x_1 x_3 - x_2 t \\ \dot{x}_3 = x_1 x_2 - x_3 t \end{cases}$$

מה, הוא הנפח
התחום שאליו
עוברת הקוביה,
$\|x_i\| \le 0.5\,\varepsilon$
כעבור 3 יחידות זמן?
בהנחה שהפתרון קיים. הוא תמיד קיים ל-$\varepsilon$ קטן

$$\dot{V} = \int_{\Omega(t)} (-3t)\, dx_1 dx_2 dx_3 = -3t\, V$$

$$\frac{\dot{V}}{V} = -3t \qquad \ln|V| = -\frac{3}{2}t^2 + C, \quad V > 0$$

$$V = V(0)\, e^{-\frac{3}{2}t^2} = \varepsilon^3 e^{-\frac{3}{2}t^2}$$

$$V(3) = \varepsilon^3 e^{-\frac{27}{2}}$$

<u>תרגיל א</u>

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = t x_2 \sin x_3 - t x_1 - \cos x_2 \cos t \\ \dot{x}_2 = t x_1 \sin x_3 - t x_2 + e^t \\ \dot{x}_3 = t x_1 \cos(x_2^3) - t x_3 \end{cases}$$

מה קורה לנפח של התיבה היחידה $x_i \in [0,1]$, $i=1,2,3$

מזמן $t=0$ עד $t=2$?

שאלה עומדת

$$\dot{V} = \int_{\Omega(t)} -3t \, dx_1 dx_2 dx_3 = -3tV$$

$$\frac{\dot{V}}{V} = -3t \qquad V \not\equiv 0, \; V>0$$

$V>0$ $\quad \ln V = -\frac{3}{2}t^2 + c \qquad V(t) = V(0) e^{-\frac{3}{2}t^2}$

$$V(2) = \underset{\overset{\|}{1}}{V(0)} e^{-\frac{3}{2}2^2} = e^{-6}$$

<u>תרגיל א</u>

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = t\cos(x_2 x_3) - e^t x_2 x_3 + x_1 \\ \dot{x}_2 = t\cos(x_1 x_3) + e^t x_1 x_3 + x_2 \\ \dot{x}_3 = t \arctan(x_1 x_2) - 2x_3 \end{cases}$$

המערכת

שומרת על נפחים

<u>תרגיל א</u>

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 \end{cases}, \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 \end{cases}, \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1^2 \end{cases}$$

שומרים על שטחים!!

# פתרון בעזרת טורי חזקות

דוגמאות לתזכורת

$$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \dots$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \dots \qquad \sin t = \frac{t}{1!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots$$

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \dots \qquad \frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + \dots$$

דוגמא

$$\ddot{x} + \cos t\, \dot{x} - x = t^2 \qquad x(0) = 1,\ \dot{x}(0) = 0$$

$$x^* = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3 + \alpha_4 t^4 + o(t^4)$$

$$\alpha_i = ? \qquad i = 0, 1, 2, 3, 4$$

להעריך את השארית $R$ בגבול

$$x = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3 + R(t), \quad R = O(t^4)$$

בגבול,

$$|t| \le \varepsilon \Rightarrow |R(t)| \le M |t|^4$$

$$M = ?, \quad \varepsilon = ?$$

$$x = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3 + \alpha_4 t^4 + \dots \qquad \alpha_0 = 1$$

$$\dot{x} = \alpha_1 + 2\alpha_2 t + 3\alpha_3 t^2 + 4\alpha_4 t^3 + \dots \qquad \alpha_1 = 0$$

$$\ddot{x} = 2\alpha_2 + 6\alpha_3 t + 12\alpha_4 t^2 + \dots$$

$$2\alpha_2 + 6\alpha_3 t + 12\alpha_4 t^2 + \dots + \left(1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} - \dots\right)\left(\alpha_1 + 2\alpha_2 t + 3\alpha_3 t^2 + \dots\right)$$

$$-\left(\alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \dots\right) = t^2$$

$$\begin{array}{c|l}
t^0 & 2\alpha_2 + \alpha_1 - \alpha_0 = 0 \\
t^1 & 6\alpha_3 + 2\alpha_2 - \alpha_1 = 0 \\
t^2 & 12\alpha_4 - \frac{\alpha_1}{2} + 3\alpha_3 - \alpha_2 = 1
\end{array}$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2}(-\overset{0}{\alpha_1} + \overset{1}{\alpha_0}) = \frac{1}{2}$$

$$\alpha_3 = -\frac{1}{3}\alpha_2 + \frac{1}{6}\alpha_1 = -\frac{1}{6}$$

$$\alpha_4 = \frac{1}{12}\left(1 + \frac{1}{2}\alpha_1 + \alpha_2 - 3\alpha_3\right)$$

$$= \frac{1}{12}\left(1 + \frac{1}{2} + 3\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6}$$

$$x = 1 + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{6}t^4 + o(t^4)$$