הרצאה 3

מערכות ליניאריות

$\dot{x} = A(t)x + B(t)$, $x \in \mathbb{R}^n$ 1

לא הומוגני

מערכת הומוגנית $\dot{x} = A(t)x$

העתקה $x \mapsto \lambda x$ שומרת על המשוואה $\lambda x + \tilde{x}$ פתרון

$x \equiv 0$ פתרון + משפט $\exists!$ $\Leftarrow$

1. פתרונות - מרחב ליניארי

2. פתרונות עם תנאי התחלה ב $t = t_0$

$$x(t_0) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

מהווים בסיס, פתרונות יסודיים fundamental solutions,

$\Leftarrow$ מימד n

3. פתרונות בלתי תלויים ברגע זמן אחד בלתי תלויים בכל הזמנים

הוכחה: פתרונות בלתי תלויים:

$$\lambda_1 \varphi_1(t) + \lambda_2 \varphi_2(t) + \dots + \lambda_n \varphi_n(t) \equiv 0 \quad \forall t!!$$

$$\Leftarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$$

כי לא קורה שהם בלתי תלויים בכל רגע זמן, הם כבר אינם עבר "במקרה"

4. פתרונות יסודיים בונים מטריצה יסודית

Fundamental matrix $\Phi(t) = \underbrace{(\varphi_1(t) \dots \varphi_n(t))}_{\text{עמודות}}$

$$\boxed{\dot{\Phi}(t)} = (\dot{\varphi}_1(t) \dots \dot{\varphi}_n(t)) = (A\varphi_1 \dots A\varphi_n) = \boxed{A(t)\Phi(t)}$$

5. מטריצה יסודית $\iff \forall t_{\mathbb{R}}\ \det \Phi(t) \neq 0$

$$W[\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_n](t) = \det[\varphi_1(t) \dots \varphi_n(t)]$$ 2

Wronskian

אם $\varphi_1 \dots \varphi_n$ פתרונות של $\dot{x} = A(t)x$ אז

$$\exists t_0 : W[\varphi_1 \dots \varphi_n](t_0) \neq 0 \iff \forall t\ W[\varphi_1 \dots \varphi_n](t) \neq 0$$

$$\exists t_0 : W[\varphi_1 \dots \varphi_n](t_0) = 0 \iff \forall t\ W[\varphi_1 \dots \varphi_n](t) = 0$$

ג. לא נכון אם $\varphi_1 \dots \varphi_n$ לא פתרונות של המשוואה $\dot{x} = A(t)x$

$X = X_h + x_p$

6. משוואה סקלרית ~~7. Wronskian~~

$a_1 \dots a_n, b \in \mathbb{C}$

$$y^{(n)} + a_1(t) y^{(n-1)} + \dots + a_n(t) y = b(t),\quad y \in \mathbb{R}$$ לא הומוגנית

$$y^{(n)} + a_1(t) y^{(n-1)} + \dots + a_n(t) y = 0$$ הומוגנית

שקולה למערכת

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix} = \vec{y} \qquad \dot{x} = A(t)x + B(t)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ -a_n & \dots & & -a_1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ b \end{pmatrix}$$

$\Leftarrow$ בהינתן $f_1, f_2, \dots, f_n$ פתרונות יסודיים

אם הם מהווים בסיס לכל הפתרונות

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_1^{(n-1)} \end{pmatrix}, \dots, \varphi_n = \begin{pmatrix} f_n \\ \vdots \\ f_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$ יסודיים $\iff$ אם

$$W[f_1 \dots f_n](t) = \det \Phi(t) = \det \begin{pmatrix} f_1(t) & \dots & f_n(t) \\ \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(t) & \dots & f_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

[illegible] לינארית

~~אולם גזרות. של ה" Wronskian~~

6. נסמן פתרונות של $\dot{x} = A(t)x$ ב- X_h. X_h נקרא פתרון כללי של
general solution
המשוואה ההומוגנית

3

נסמן X פתרונות של $\dot{x} = A(t)x + B(t)$
(גם פתרון כללי)

נניח x_p - פתרון כלשהו של המשוואה. הוא נקרא פתרון פרטי
particular solution

אז

$$\boxed{X = X_h + x_p}$$

הוכחה:

$$x(t) \in X \Rightarrow \underbrace{x(t) - x_p}_{x_h} \in X_h$$

$$x_h \in X_h \Rightarrow x_h + x_p \in X$$

לכן כדי לפתור צריך למצוא X_h ו- x_p!

~~Example~~ דוגמא

$$\dot{x}_1 = 5x_1 - 2x_2$$

$$\dot{x}_2 = 6x_1 - 2x_2 = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

מחפשים פתרון בצורה $x = \xi e^{\lambda t}$

$$\lambda \xi e^{\lambda t} = A \xi e^{\lambda t}$$

$$\lambda \xi = A \xi$$

ערך עצמי

$$(A - \lambda I)\xi = 0 \Rightarrow \lambda \in \operatorname{Spec} A$$

ξ - eigenvector וקטור עצמי

אם יש n וקטורים עצמיים בלתי תלויים $\Rightarrow \varphi_i = \xi_i e^{\lambda_i t}$ בלתי תלויים

$$x = c_1 \xi_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + c_n \xi_n e^{\lambda_n t} \Leftarrow$$

פתרונות יסודיים

סעיף א 4

$$\dot{x}_1 = 5x_1 - 2x_2$$
$$\dot{x}_2 = 6x_1 - 2x_2$$

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} 5-\lambda & -2 \\ 6 & -2-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda-1)(\lambda-2)$$

$$\lambda_2 = 2 \quad \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 0 \\ 6x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases} \quad 3x_1 = 2x_2 \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 1 \quad \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 = 0 \\ 6x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases} \quad 2x_1 = x_2 \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{t} \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

$$W\begin{bmatrix} 2\cdot e^{2t} & e^{t} \\ 3e^{2t} & 2e^{t} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} e^{3t} = e^{3t} \neq 0$$

סעיף א

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} t-1 \\ \sin(t-1) \end{pmatrix}$$.א

לא יכול להיות פתרון ל $\dot{x} = A(t)x$

$\varphi(1) = 0 \Rightarrow$ יש פתרון אחד $x \equiv 0$

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sin(t-1)+1 \end{pmatrix}$$.ב

לא יכולים להיות פתרונות כי $\varphi_1 - \varphi_2 = \begin{pmatrix} t-1 \\ \sin(t-1) \end{pmatrix}$

$$W[\varphi_1 \ \varphi_2](t) = \begin{vmatrix} t & 1 \\ 1 & 1-\sin(t-1) \end{vmatrix} =$$
$$= t^2 - t\sin(t-1) - 1 \neq 0$$

א.ב.ג

$$W[\varphi_1, \varphi_2](1) = 1 - \sin 0 - 1 = 0$$

דוגמא

5

$\ddot{y} + y = 0 \quad y = c_1 \cos t + c_2 \sin t$

$$W[\cos t, \sin t] = \begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix} = 1$$

דוגמא

האם t, t^2 יכולים להיות פתרונות

למשוואה

$\ddot{y} + a_1(t)\dot{y} + a_2(t)y = 0$, $a_1, a_2 \in C$

כי

$$W[t, t^2] = \begin{vmatrix} t & t^2 \\ 1 & 2t \end{vmatrix} = 2t^2 - t^2 = t^2$$

מתאפס ב $t=0$

$\ddot{y} = 0$ אבל

$(t-1)^2, \cos(t-1)$

לא כי

$$W = \begin{vmatrix} (t-1)^2 & \cos(t-1) \\ 2(t-1) & -\sin(t-1) \end{vmatrix} \neq 0, \quad W(1) = 0$$

כי

קונטרה דוגמא חזקה

דוגמא

$$f_1(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ t^2 & t \geq 0 \end{cases}, \quad f_2(t) = \begin{cases} t^2, & t<0 \\ 0, & t \geq 0 \end{cases}$$

$W[f_1, f_2](t) = 0$

אבל

האם f_1, f_2 יכולים להיות פתרונות למשוואה

$\ddot{y} + a_1(t)\dot{y} + a_2(t)y = 0 \quad a_1, a_2 \in C$

לא כי הם בת"ל!!

דוגמא

$\{t, 1\}$ יכולים להיות פתרונות

$$W[t, 1] = \begin{pmatrix} t & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1 \neq 0$$

$\ddot{y} = 0$

$$f_1, \dots, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_j \in C^n[a,b]$$

מתי הם יכולים להיות פתרונות יסודיים? 6

$$y^{(n)} + a_1(t) y^{(n-1)} + \dots + a_n(t) y = 0$$

~~מענה~~ מקרה: אם ורק אם

$$W_* = W[f_1 \dots f_n](t) \neq 0 \quad \forall t \in [a,b]$$

$$W[y, f_1 \dots f_n](t) = \begin{pmatrix} y & f_1 & \dots & f_n \\ y' & & & \\ y^{(n)} & f_1^{(n)} & \dots & f_n^{(n)} \end{pmatrix} = (-1)^n W_*(t) y^{(n)} + \dots + ()y = 0$$

כפי שרצינו!

ורק אחד! ← באמת

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0$$

$$y^{(n)} + \tilde{a}_1 y^{(n-1)} + \dots + \tilde{a}_n y = 0$$

$$\Delta a_1 y^{(n-1)} + \dots + \Delta a_n y = 0$$

מספר (מקורי) משוואה

נניח $a_1 - \tilde{a}_1 \not\equiv 0$

בנקודה $t = t_0$

$\Delta a_1(t_0) \neq 0$

$\Rightarrow$ בסביבה

$\Rightarrow$ n פתרונות בת״ל (יסודיים)

למשוואה מסדר $n-1$ בסביבת $t = t_0$ $\Leftarrow$ סתירה

נניח $\Delta a_1 \equiv 0, \Delta a_2 \not\equiv 0 \Leftarrow$ אותו דבר וכו׳ וכו׳

דוגמא

$$t-1, \; e^{(t-1)^2}$$

$$W = \begin{vmatrix} t-1 & e^{(t-1)^2} \\ 1 & 2(t-1)e^{(t-1)^2} \end{vmatrix} = e^{(t-1)^2} \begin{pmatrix} t-1 & 1 \\ 1 & 2(t-1) \end{pmatrix} = e^{(t-1)^2}[2t^2 - 4t + 2 - 1] = e^{(t-1)^2} \cdot 2(t^2 - 2t + \tfrac{1}{2})$$

DE:

$$\begin{vmatrix} y & t-1 & e^{(t-1)^2} \\ y' & 1 & 2(t-1)e^{(t-1)^2} \\ y'' & 0 & 2e^{(t-1)^2} + 4(t-1)^2 e^{(t-1)^2} \end{vmatrix} = 0$$

$t_{1,2} = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ not fun

$t \in [-1, 0]$, $t \notin [1, 2]$

$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $\varphi_j \in C^1$

האם הם יכולים להיות פתרונות

יסודיים של DE מהסוג $\dot{y} = A(t)y$

$y \in \mathbb{R}^n$, $A(t) \in C$? 7

תשובה (חלקית): אם רק אם

$\forall t \quad W[\varphi_1 \dots \varphi_n](t) \neq 0$, $t \in [a,b]$

<u>הוכחה</u>: נסמן $\Phi(t) = (\varphi_1(t) \dots \varphi_n(t))$

מטריצה יסודית?

$$W[\varphi_1 \dots \varphi_n](t) = \det \Phi(t)$$

אם Φ מטריצה יסודית אז $\dot{\Phi} = A(t)\Phi$

א. $A(t) = \dot{\Phi}(t)\Phi(t)^{-1} \Leftarrow \exists \Phi^{-1} \Leftarrow W \neq 0$

ב. Φ - יסודית $\Leftarrow \det \Phi \neq 0$ (הגדרה)

מ.ש.ל

<u>דוגמא</u>

$\begin{pmatrix} \sin t \\ t-\pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ אם יכולים להיות פתרונות של $\dot{y} = A(t)y,\ y \in \mathbb{R}^2$ ב-$[2,4]$

$A(t) = \begin{pmatrix} \cos t & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \pi - t & \sin t \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} \sin t, & 1 \\ t-\pi, & 1 \end{vmatrix} = \sin t - (t-\pi) \Big|_{t=\pi} = 0$$

אבל יכולים ב-$[2, \pi - \varepsilon]$ $\forall \varepsilon \in [0,1)$

(W - בקטע הזה לא מתאפס)

דוגמה

האם $t, \cos t$ יכולות להיות פתרונות למשוואה $\ddot{y} + a_1(t)\dot{y} + a_2(t)y = 0$ ב-$[0,1]$?

$a_1, a_2 \in C$

$$W = \begin{vmatrix} t & \cos t \\ 1 & -\sin t \end{vmatrix} = -(\overset{0}{\underset{}{t \sin t}} + \overset{0}{\cos t}) < 0$$:לא

המשוואה,

43

$$\begin{vmatrix} y & t & \cos t \\ \dot{y} & 1 & -\sin t \\ \ddot{y} & 0 & -\cos t \end{vmatrix} = 0$$

$$-\ddot{y}(t\sin t + \cos t) - \dot{y}(-t\cos t) + y(-\cos t) = 0$$

$$\ddot{y} + \frac{t\cos t}{t\sin t + \cos t}\dot{y} + \frac{\cos t}{t\sin t + \cos t}y = 0$$

נוסחה:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

משפט (נוסחת) Abel-Liouville

נתונה מערכת: $\dot{x} = A(t)x, \; x \in \mathbb{R}^n \; (\mathbb{C}^n)$

$A(t) \in C$

נניח $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ - פתרונות (לא בהכרח יסודיים)

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t), & a_{12}(t), & \dots, & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t), & a_{22}(t), & \dots, & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t), & a_{n2}(t), & \dots, & a_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Tr}A \overset{def}{=} a_{11}(t) + a_{22}(t) + \dots + a_{nn}(t)$$

Trace.

$$W(t) = W[\varphi_1 \dots \varphi_n](t) \in C^1$$

כמובן
אז

$$\boxed{\dot{W} = T_r A(t) \cdot W}$$

$$\left(\frac{\dot{w}}{w} = T_r A \ , \ w \overset{?}{\neq} 0 \atop \ln|W| = \int_{t_0} T_r A\, ds - \ln|W(t_0)| \right)$$

אז

$$W(t) = W(t_0)\, e^{\int_{t_0}^{t} T_r(A(s))\,ds}$$

(אני זוכר ☺)

הוכחה: (נגזיר

$$\Phi(t) = \Big(\underbrace{\varphi_1(t) \dots \varphi_n(t)}_{\text{עמודות}}\Big) = \overbrace{\begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \vdots \\ \varphi_n(t) \end{pmatrix}}^{\text{שורות}}$$

9

$$\dot{\Phi} = A(t)\Phi \ , \quad \dot{\varphi}_i = (a_{i1} \dots a_{in})\,\Phi$$

$$\dot{\varphi}_i = a_{i1}\varphi_1 + a_{i2}\varphi_2 + \dots + a_{in}\varphi_n \ , \quad i = 1, \dots, n$$

ידוע:
$$(d_1 d_2 \dots d_n)' = \dot{d}_1 d_2 \dots d_n + d_1 \dot{d}_2 \dots d_n + \dots + d_1 d_2 \dots \dot{d}_n$$

permutation degree

$$\frac{d}{dt}\begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ \vdots & & & \\ d_{n1} & d_{n2} & \dots & d_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 \dots j_n} \frac{d}{dt}\left(d_{1j_1} \dots d_{nj_n}\right)(-1)$$

[illegible] [illegible]

$$\dot{W} = \frac{d}{dt}\det\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix} = \frac{d}{dt}\left(\det\begin{pmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \dot{\varphi}_2 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix} + \dots + \det\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \dot{\varphi}_n \end{pmatrix}\right.$$

$$\det\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \dot{\varphi}_i \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ a_{i1}\varphi_1 + a_{i2}\varphi_2 + \dots + a_{ii}\varphi_i + \dots + a_{in}\varphi_n \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix} =$$

$$= \det\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix} \cdot a_{ii}$$

לכן מקבלים

$$\dot{W} = \big(a_{11}\det\Phi + a_{22}\det\Phi + \dots + a_{nn}\det\Phi$$

מ.ש.ל. 10

מקרה סקלרי!

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_n(t)y = 0 \quad , \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

$f_1(t), \dots, f_n(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פתרונות

$(\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ או$)$

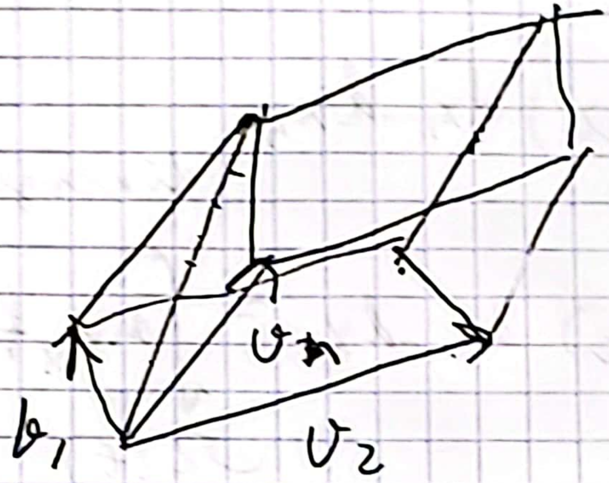
$$\Rightarrow \quad \dot{\vec{y}} = A(t)\vec{y} \quad , \quad A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & & & -a_1 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Tr} A(t) = -a_1(t)$$

$$\boxed{\dot{W} = -a_1(t)\,W}$$

$$\boxed{W(t) = W(t_0)\,e^{-\int_{t_0}^{t} a_1(s)\,ds}}$$

$$W = \det\Phi = \det\begin{pmatrix} f_1 & \dots & f_n \\ \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & \dots & f_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$



משמעות גאומטרית:

כנפח:

$$\text{Volume} = \left| \det \begin{array}{c} \text{שורות} \\ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \end{array} \right| = \left| \det \begin{array}{c} \begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{pmatrix} \\ \text{עמודות} \end{array} \right|$$

$$W(t) = \det\begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \dots & \varphi_n(t) \end{pmatrix} = \pm \text{ נפח שלו}$$

כל נפחות כמו לא בגורת [illegible] גינה

משתנים לפי אותו החוק: $V = V(0)e^{\int_0^t Tr(A(s))ds}$