הרצאה 3

משפט 1

$U \in C^2$, $\forall x\ U(x) \geq 0$ (אין הגבלת הכלליות)
$U \geq c \Rightarrow U := U - c$

⟸ כל פתרון אפשר להאריך עד $\pm\infty$ ב-t

הוכחה:

$$E = \frac{1}{2}\|\dot{x}\|^2 + U(x) = \text{const}$$

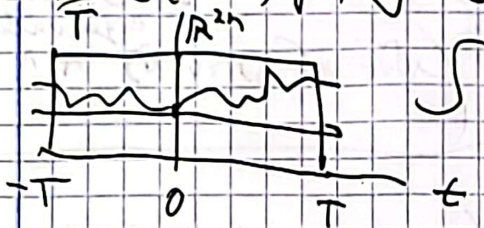
$$\Rightarrow \|\dot{x}\| = \sqrt{2(E - U(x))} \leq \sqrt{2E} < \sqrt{2E} + 1$$

$t \in \mathbb{R}$

$$\|x\| = \|x(0) + \int_0^t \dot{x}(s)\,ds\| \leq \|x(0)\| + |t|\sqrt{2E}$$

$$< \|x(0)\| + |t|\sqrt{2E} + 1$$

כל פתרון [illegible] עד ~~[illegible]~~ עד [illegible] Ω

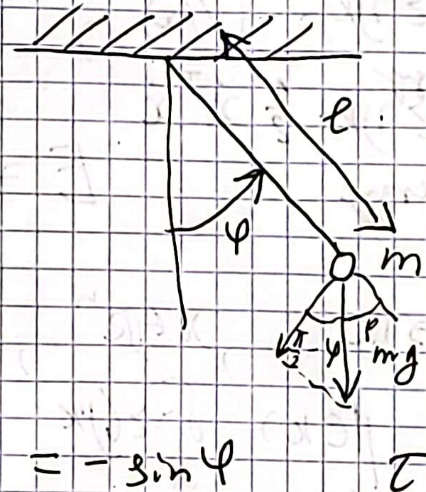


$$\Omega_T = \left\{ (x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^{2n},\ |t| \leq T \ \middle|\ \begin{array}{l} \|\dot{x}\| \leq \sqrt{2E} + 1 \\ \|x\| \leq \|x(0)\| + T\sqrt{2E} + 1 \end{array} \right.$$

מ.ש.ל.

מקרה פרטי: מישור הפזה, $n=1$

דוגמא: מטוטלת Pendulum



Newton

$$m l^2 \ddot{\varphi} = -m g l \sin\varphi$$

מומנט אינרציה   מומנט כוח

$$\frac{l}{g}\ddot{\varphi} = -\sin\varphi \qquad \tau = \sqrt{\frac{g}{l}}\, t \Rightarrow \frac{d^2}{d\tau^2}\varphi = -\sin\varphi$$

$$\varphi = \varphi(\tau)$$

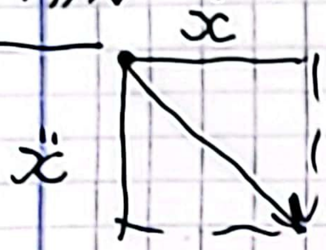
"מטוטלת מתמטית" $\ddot{x} = -\sin x$
Arnold

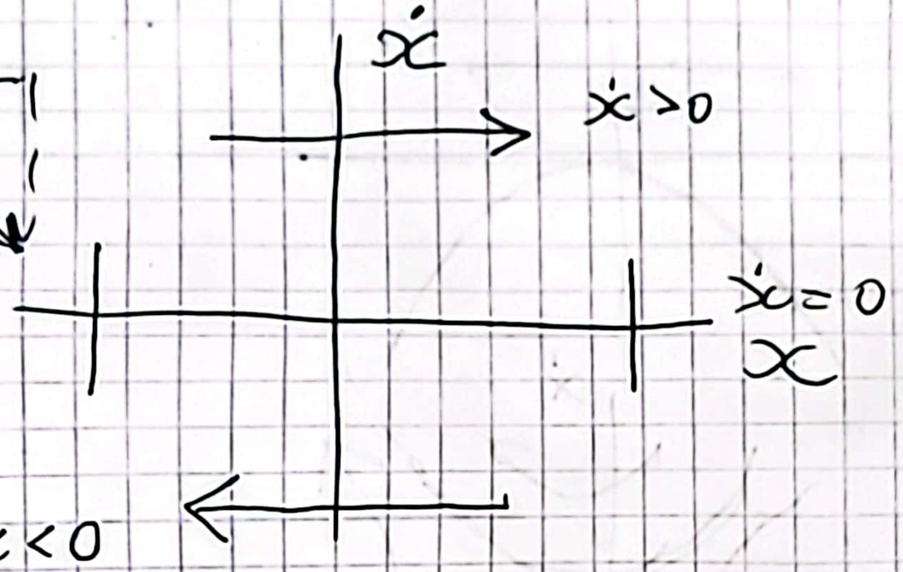
$x \in \mathbb{R}$, $\ddot{x} = -\sin x$ משוואת Newton   2

$\ddot{x} = -\frac{\partial}{\partial x}(-\cos x)$, $V = -\cos x$

$E = \frac{1}{2}\dot{x}^2 - \cos x = const$

מהירות





מישור הפאזה

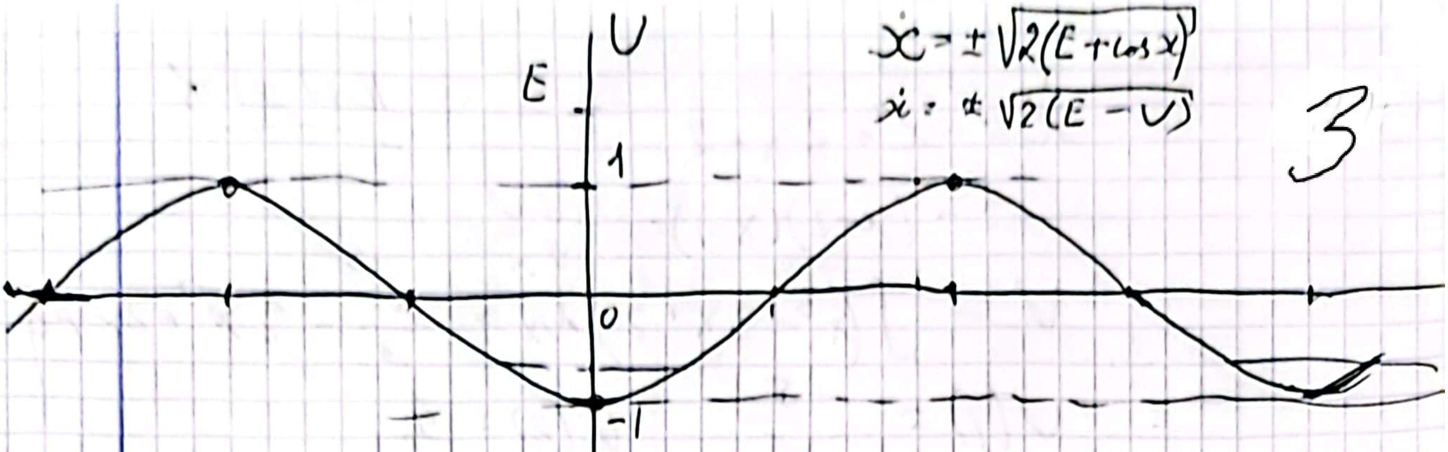
מוגדר במישור
ל ODE מסדר 2
$\ddot{x} = f(x)$

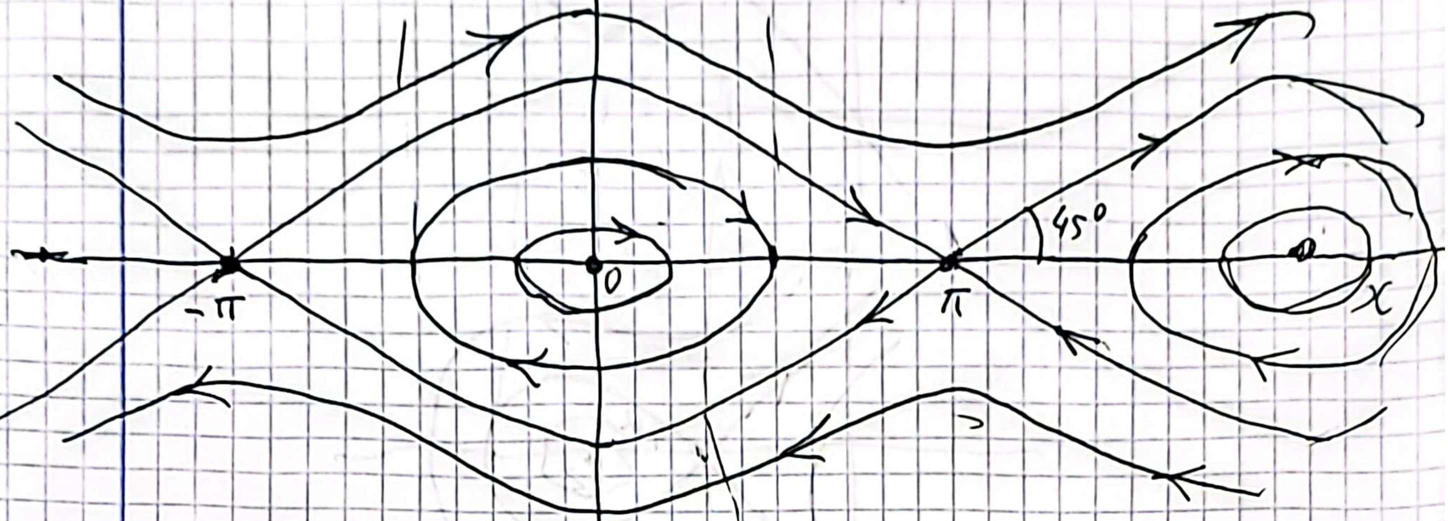
כאשר $\dot{x}=0$ מקבלים רק רכיב אחת של המהירות!

מהירות = $(\dot{x},\ddot{x})$

$\dot{x} = \pm\sqrt{2(E+\cos x)}$

$\dot{x} = \pm\sqrt{2(E-U)}$





כינוי , Separatrix

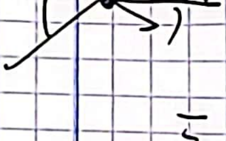
קו מפריד (נקודות קריטיות

$\dot{x} = f(x)$ נקודות קריטיות , מצבי שיווי : $f(x)=0$

$U = E + \frac{1}{2}U''(x_*)\Delta x^2 + o(\Delta x^2)$ בנק' מקסימום

$U''(x_*)$

$\dot{x} = \sqrt{2(E-U)} =$



$U''(x_*) < 0$

$= \sqrt{2\cdot\frac{1}{2}|U''(x_*)\Delta x^2 + o(\Delta x^2)} =$

$= \sqrt{|U''(x_*)|\Delta x|}\ \sqrt{1+\underbrace{o(1)}_{\alpha}} = \sqrt{U''(x_*)}\,\Delta x + o(\Delta x)$

$= 1 + \frac{1}{2}\alpha + o(\alpha)$

$\alpha = o(1)$

$tg\,\varphi = \sqrt{U''(x_*)}$

$U(x) = E + \underbrace{\frac{1}{2}U''(x_0)\Delta x^2 + \frac{1}{3!}U'''(x_0)\Delta x^3 + \ldots}_{0''} + \frac{1}{(2k)!}U^{(2k)}(x_0)\Delta x^{2k} + o(\Delta x^{2k})$

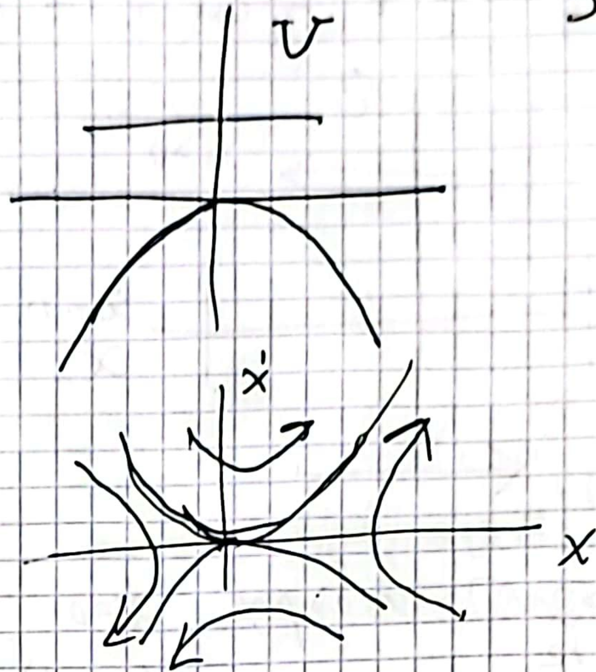
$\ddot{x} = x^3$, $V = -\int x^3 dx = -\frac{x^4}{4} + c \to 0$

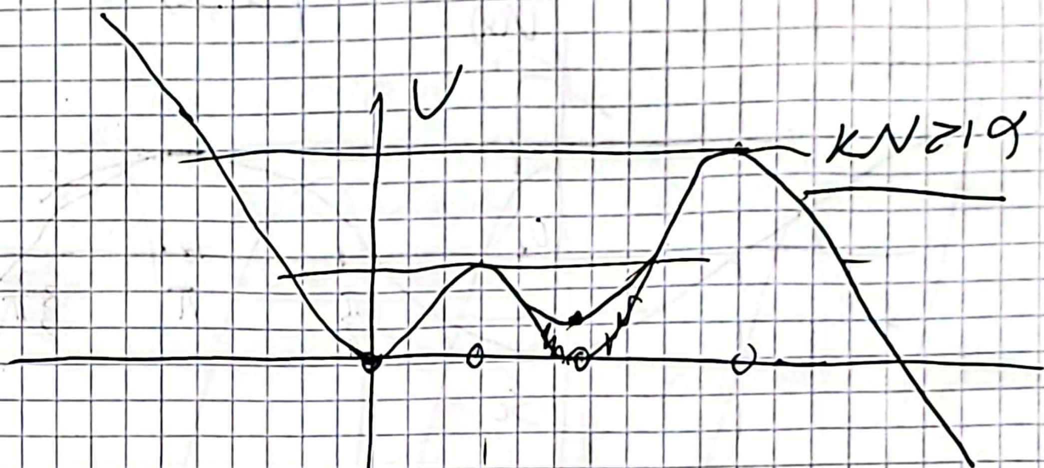
kN≥19 / u'δ'δe

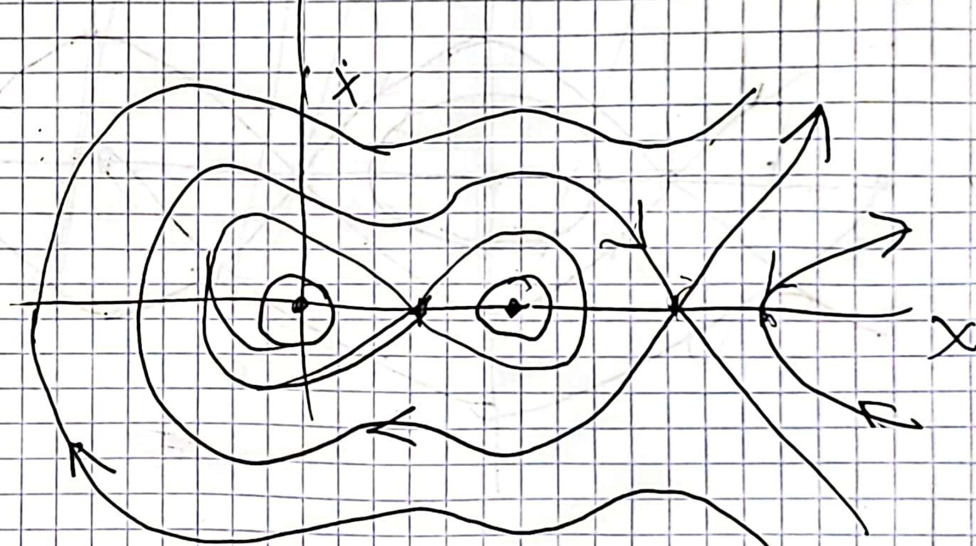
$\frac{\dot{x}^2}{2} - \frac{x^4}{4} = const$

$E = 0$

$\dot{x} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} x^2$







5

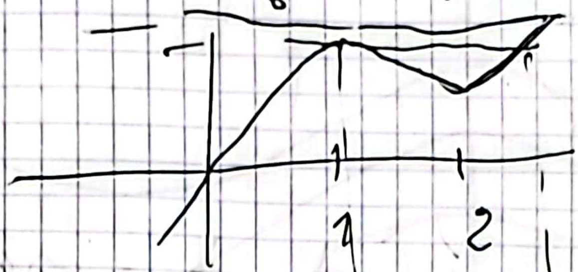
KN 2115

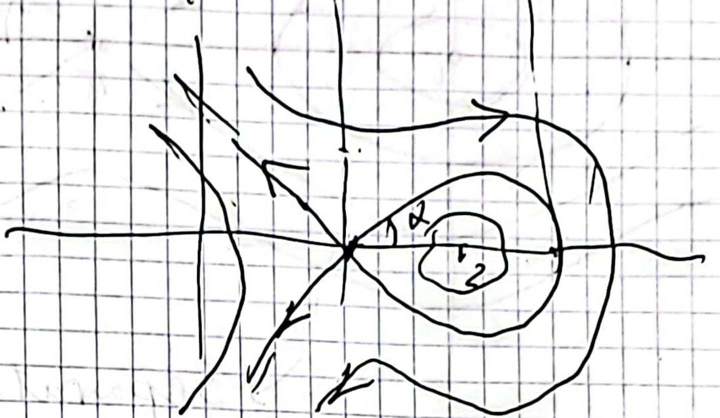
$\dot{x} = -x^2 + 3x - 2$

$= -(x-2)(x-1) = -\frac{\partial V}{\partial x}$

$V = \int (x^3 - 3x + 2)\,dx = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 2x + c$

$V(1) = \frac{5}{6} \qquad V(2) = \frac{4}{6}$





$tg\,\alpha = \sqrt{|V''(1)|} = \sqrt{(x^2-3x+2)'_{x=1}} =$

$\alpha = 45^0 \qquad = \sqrt{(2x-3)_{x=1}} = \sqrt{1}$

נחזור למערכת של מטוטלת

$\boxed{\text{תלות בפרמטר}}$

6

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\sin x \\ x(0)=a, \ \dot{x}(0)=a, \quad a \approx 0 \end{cases}$$

$x(t,a)=\varphi(t,a), \quad \varphi(t,0)=0, \quad \varphi\in C^\infty$

$$x(t,a)=\varphi(t,0)+\varphi'_a(t,0)a+\frac{1}{2}\varphi''_{aa}(t,\theta a)a^2$$

לכל t קיים $\theta=\theta(t)$, $\theta\in(0,1)$

$\boxed{\begin{matrix} t\in[-T,T] \\ |a|\le a_0 \end{matrix}}$ בקומפקט: $|\varphi''_{aa}|\le const$

$$\Rightarrow x(t,a)=\varphi(t,0)+\varphi'_a(t,0)a+O(a^2)$$

$o(a)$ אז

$$x(t,a)=0+\underbrace{\varphi'_a(t,0)}_{z(t)}a+o(a)$$

$z(t)=?$

נגזור לפי a:

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\sin x \\ x(0)=a, \ \dot{x}(0)=a \end{cases}$$

$x=\varphi(t,a)$

$$\begin{cases} \ddot{x}'_a = -\cos x\cdot x'_a \\ x'_a(0)=1, \ \dot{x}'_a(0)=1 \end{cases}$$

בנק' $a=0$

אז $x=0$

$x'_a=z$

$$\begin{cases} \ddot{z} = -\cos 0\cdot z = -z \\ z(0)=1, \ \dot{z}(0)=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow z=c_1\cos t+c_2\sin t$$

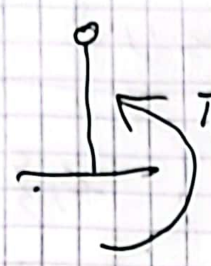
מתנאי ההתחלה

$$z=\cos t+\sin t$$

$$x(t,a)=0+(\cos t+\sin t)a+O(a^2)$$

נכון לכל T, $t\in[-T,T]$

קר תנאי התחלה אחר



$$\begin{cases} \ddot{x} = -\sin x \\ x(0) = \pi + a, \ \dot{x}(0) = a^2 \end{cases}$$

7

עכשיו מקבלים $x(t,a) = \varphi(t,a)$

$\varphi(t,0) \equiv \pi \quad , \quad z = \varphi'_a(t,0)$

$x(t,a) = \pi + z(t)a + o(a)$

$$\begin{cases} \ddot{z} = -\cos \overset{\pi}{x} \cdot z = z \\ z(0) = 1, \quad \dot{z}(0) = 2a\big|_{a=0} = 0 \end{cases}$$

פתרון הומוגני

$z(t) = c_1 \cosh t + c_2 \sinh t$ $\quad \cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$

$z(t) = \cosh t$ $\quad \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$

$\cancel{x}$

$x(t,a) = \pi + \cosh t \cdot a + \cancel{O}(a^2)$ לא מספיק

$o(a)$ א' [illegible]

אבל זה רק נכון ל $t \in [T,T]$ ו a קטן

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\sin(x + a) \\ x(0) = \pi + a, \quad \dot{x}(0) = \sin a \end{cases}$$

$x(t,a) = \pi + \varphi'_a(t,0) a^{\cancel{2}} + o(a)$

$$\begin{cases} \ddot{x}'_a = -\cos(x+a)(x'_a + 1) \\ x'_a(0) = 1, \quad \dot{x}'_a(0) = \cos a \end{cases}$$ $\quad \varphi(t,0) = \pi$

$\Leftarrow a = 0$

$$\begin{cases} \ddot{z} = +z + 1 \\ z(0) = 1, \quad \dot{z}(0) = 1 \end{cases}$$

$z = -1 + c_1 \cosh t + c_2 \sinh t$

$z = -1 + 2\cosh t + \sinh t$

$x = \pi + (-1 + 2\cosh t + \sinh t)a + o(a)$

Linearization לינאריזציה

$$\dot{x} = f(x), \quad f(\xi)=0, \quad x,\xi \in \mathbb{R}^n$$

ξ נקרא מצב מנוחה, נק' שיווי משקל,
נק' קריטית, נק' ~~[illegible]~~ חריגה,
critical point, equilibrium, singular point.

ξ - נק' קריטית (critical point)

נניח $f \in C^2$, $x \approx \xi$

$$\dot{x} = f(x) = \underbrace{f(\xi)}_{=0} + f'(\xi)(x-\xi) + O(\|x-\xi\|^2)$$

הפרעה

$$\boxed{\dot{z} = f'(\xi)\, z} \qquad z \in \mathbb{R}^n$$

לינאריזציה

$$\boxed{z = x - \xi}$$ הייני הפרעה, אילו $=0$

אם נכון במקרה כללי,

$$f = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix} \quad f'(\xi) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(\xi) \\ \vdots \\ \nabla f_n(\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'_{1x_1}(\xi) & f'_{1x_2}(\xi) & \dots & f'_{1x_n}(\xi) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f'_{nx_1}(\xi) & f'_{nx_2}(\xi) & \dots & f'_{nx_n}(\xi) \end{pmatrix}$$

מטריצת Jacobi

$$\dot{x} = -\sin x, \quad x \in \mathbb{R}$$

[illegible]

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\sin x_1 \end{cases}, \quad f'(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos x_1 & 0 \end{pmatrix}$$

ל$\xi=(0,0)$ נקבל $f'(\xi)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$

9

ליניארי כזה:

$$\begin{cases}\dot z_1 = z_2\\ \dot z_2 = -z_1\end{cases} \qquad \begin{pmatrix}z_1\\ z_2\end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix}\cos t\\ -\sin t\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}$$

עוד נראה למה

ל$\xi=(\pi,0)$ נקבל $f'(\xi)=f'(\pi,0)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

$$\begin{cases}\dot z_1 = z\\ \dot z_2 = z_1\end{cases} \qquad \begin{pmatrix}z_1(t)\\ z_2(t)\end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix}\cosh t\\ \sinh t\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}\sinh t\\ \cosh t\end{pmatrix}$$

המערכת לא מתנהגת כמו הליניארי.

כי לא סגור.

$\dot x = x^2,\ x\in\mathbb{R}$ [illegible]

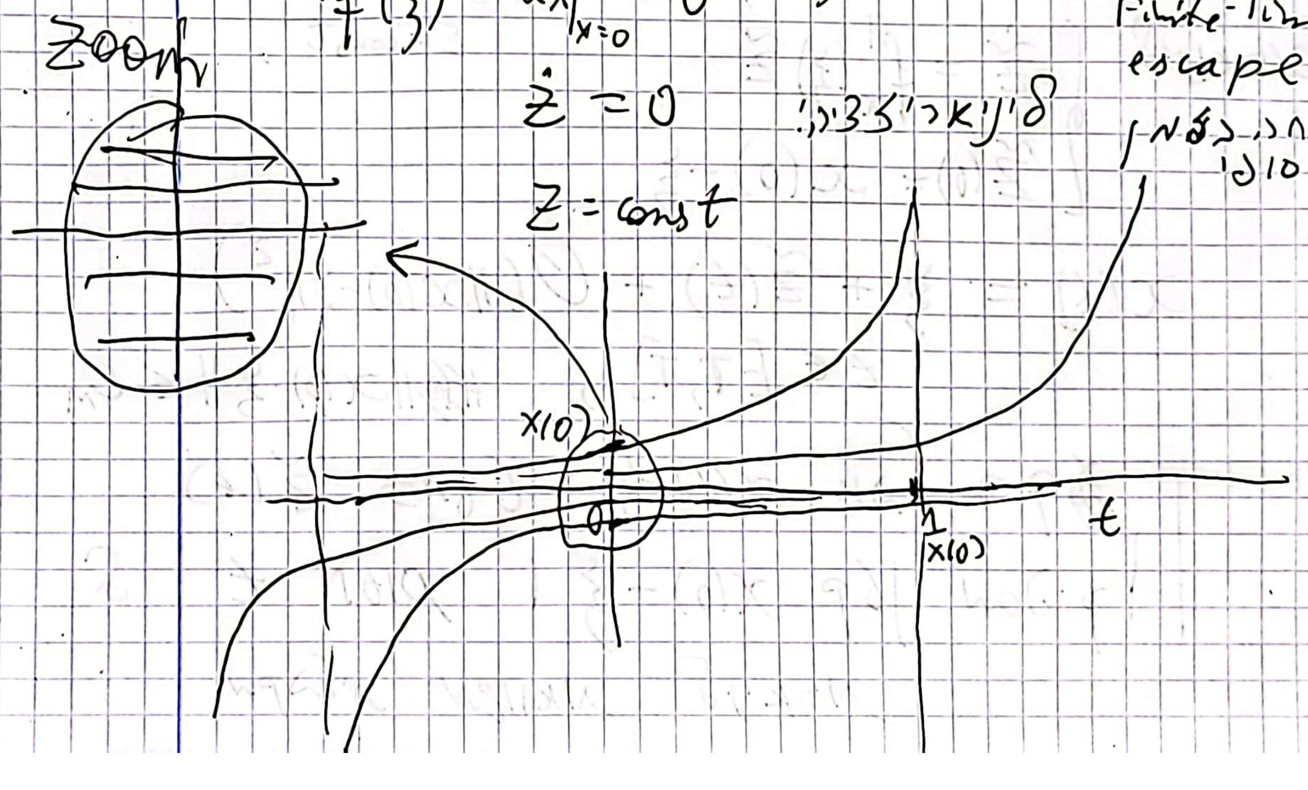
$f'(\xi) = 2x\big|_{x=0} = 0 \qquad \xi=0$

Finite-Time escape

בריחה בזמן סופי

$\dot z = 0$ ליניארי כזה:

$z = \text{const}$



עוד הסבר

$\dot{x} = f(x)\,,\ x \in \mathbb{R}^n,\ f \in C^2$

$f(\xi) = 0$

תנאי התחלה, $x(0) = \xi + \varepsilon \vartheta\,,\quad \|\vartheta\| = 1$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$

$$x(t,\varepsilon) = \varphi(t,\varepsilon) = \xi + \underbrace{\varphi'_\varepsilon(t,0)}_{z}\varepsilon + O(\varepsilon^2)$$

$t \in [-T, T]$

$|\varepsilon| \le \varepsilon_M$

$$\varphi''_{t\varepsilon}(t,\varepsilon) = \dot{x}'_\varepsilon = f'_x(x)\, x'_\varepsilon$$

$$\varphi'_\varepsilon(0,\varepsilon) = x'_\varepsilon(0) = \vartheta\,,\quad \|\vartheta\| = 1$$

מציבים $\varepsilon = 0$

$$\begin{cases} \dot{z} = f'_x(\xi)\, z \\ z(0) = \vartheta\,, \quad \|\vartheta\| = 1 \end{cases} \qquad x(0) = \vartheta\varepsilon$$

$$x(t,\varepsilon) = \xi + z(t)\varepsilon + O(\varepsilon^2)$$

$$x(t,\varepsilon) = \xi + \underbrace{z(t)\varepsilon}_{\tilde{z}} + O(\|x(0) - \xi\|^2)$$

פורמלית

לינאריזציה, $$\begin{cases} \dot{\tilde{z}} = f'_x(\xi)\, \tilde{z} \\ \tilde{z}(0) = x(0) - \xi \end{cases}$$ $\varepsilon = \text{const}\,,$

$$x(t) = \xi + \tilde{z}(t) + O(\|x(0) - \xi\|^2)$$

$t \in [-T, T]\,,\quad \|x(0) - \xi\| \le \varepsilon_M$

$\tilde{z}(t)$ כמעט $x(t) - \xi$ אבל רק

ל t חסום ו $x(0) - \xi$ קטן מספיק!

מקבלים משוואות לינאריות

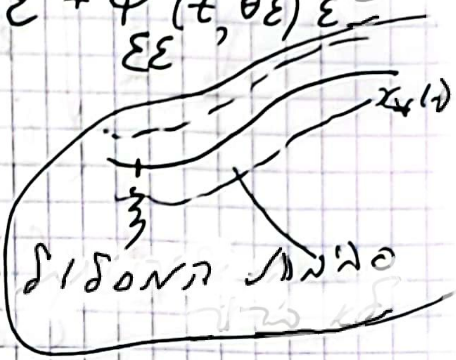
מקרה לא אוטונומי

11

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(0) = \xi + \varepsilon v, \end{cases} \qquad \|v\| = 1, \quad \varepsilon = 0 \Rightarrow x = x_*(t)$$

וריאציית תנאי ההתחלה

$$x = \varphi(t, \varepsilon) = \underset{\varphi(t,0)}{x_*(t)} + \underbrace{\varphi'_\varepsilon(t,0)\,\varepsilon}_{z} + \varphi''_{\varepsilon\varepsilon}(t, \theta\varepsilon)\,\varepsilon^2$$



$$\begin{cases} \dot{x}'_\varepsilon = f'_x(t, x)\, x'_\varepsilon \\ x'_\varepsilon(0) = v \end{cases}$$

משוואה בווריאציות

$$\begin{cases} \dot{z} = f'_x(t, x_*(t))\, z \\ z(0) = v \end{cases} \qquad \tilde{z} = \varepsilon z$$

$$x(t) = x_*(t) + \tilde{z}(t) + O(\|x(0) - \xi\|^2)$$

$t \in [T, T]$, $\|x(0) - \xi\| \le \varepsilon_M \ll 1$

$$\begin{cases} \dot{\tilde{z}} = f'_x(t, x_*(t))\, \tilde{z} \\ \tilde{z}(0) = x(0) - \xi \end{cases}$$

לינאריזציה לאורך הפתרון