$x = e^t + (t-1)^{25} \cdot \frac{1}{25!}$ $x = e^t$ המקום   **<u>דוגמא</u>**

יכולים להיות פתרונות שונים המשלים

$$x^{(k)} = f(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(k-1)}) \qquad k \le 26$$

תנאי התחלה ב $t=1$ $k = 26$?

$$\frac{d^8}{dt^8}\Big|_{t=1} (e^t) = e, \quad \frac{d^3}{dt^3}\Big|_{t=1} (e^t) = e \qquad k < 26$$

אין יחידות... $j = 0, 1, \dots, k$

$$\dots, \quad \frac{d^{25}}{dt^{25}}\Big|_{t=1} e^t, \quad \frac{d^{25}}{dt^{25}}\Big|_{t=1} e^t + 25! \qquad k = 26$$

e " e

<u>דוגמא!</u>   <u>אינסוף!</u>

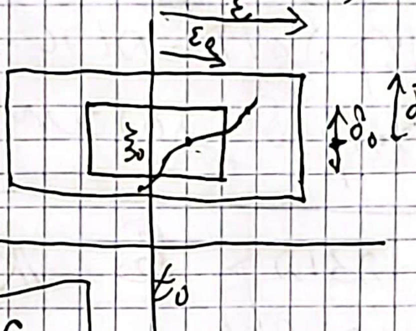
אפשרי

$$x^{(26)} = e^t$$

הרצאה 2

הארכת פתרונות של ODE

משפט קיום הפתרון: נוסח אחר (מבצעים ε-δ)



בעיית קושי Cauchy

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

$$(t_1, x_1) \in \Omega_0: \ |t - t_0| \le \varepsilon_0, \ \|x - \xi_0\| \le \delta_0$$

$$(t, x) \in \Omega: \begin{cases} |t - t_0| \le \varepsilon \\ \|x - \xi_0\| \le \delta \end{cases}$$

$$\varepsilon > \varepsilon_0, \quad \delta > \delta_0$$

$$\boxed{\begin{gathered} f \in C \\ \|f\| \le M \\ \forall (t, x) \in \Omega \end{gathered}}$$

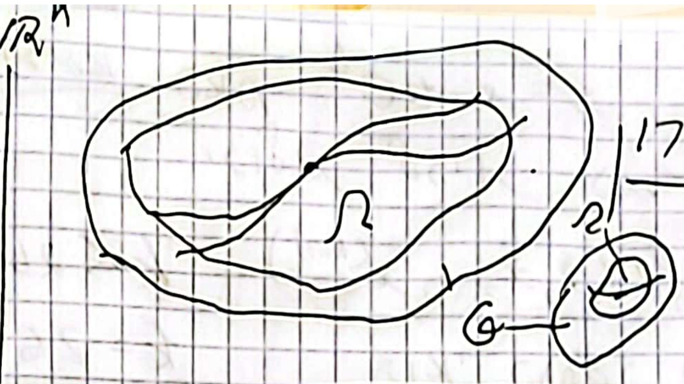
תנאי התחלה:

$$x(t_1) = \xi_1$$

$$(t_1, \xi_1) \in \Omega_0 \subset \Omega$$

$\Leftarrow$ קיים פתרון מוגדר ב $t \in [t_1 - \varepsilon_1, t_1 + \varepsilon_1]$

$$\varepsilon_1 = \min\left\{\varepsilon - \varepsilon_0, \frac{\delta - \delta_0}{M}\right\}$$



משפט הארכת הפתרון

2

$G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ תחום פתוחה

$\Omega \subset G$, Ω קומפקטי

נניח תנאי קיום הפתרון ו- מתקיימים בכל נק' של G

(ליפשיץ, $f \in C$, $\|f\| \le M_\Omega$)

אז כל פתרון אפשר להאריך עד לשפת Ω בכל כיווני הזמן

תזכורת: קומפקטיות: שתי הגדרות:

1. טופולוגית: לכל כיסוי של הקבוצה, בקבוצות פתוחות יש תת-כיסוי סופי.
2. במרחבים מטריים שלמים:

לכל סדרת נקודות יש תת-סדרה מתכנסת (~~[illegible]~~ טרום-קומפקטיות, precompact)

גם אשר מתכנסת לנקודה מן הקבוצה.

3. ב-$\mathbb{R}^n$ כל קבוצה קומפקטית $\Leftrightarrow$ חסומה וסגורה.

הוכחת המשפט: ניקח כיסוי של סביבות ל-Ω אשר קיימים לפי הנחות. נבחר תת-כיסוי סופי. מכל החלקים הפנימיים Ω_0 לוקלית $\Rightarrow$ נבחר Δt שהוא המינימום של כל ε מתאימים. עכשיו יוצאים מכל נקודה ובתוך מספר סופי של צעדים מגיעים לגבול של Ω.

נניח בשלילה (t_0,x_0)-מ גם $t_1 > t_0$ מימין, x_1

$\in \text{Interior } \Omega$

$(t_1,x_1)\notin\Omega$, $(t_1,x_1)\in G$

$t_* = \sup\{t\in[t_0,t_1] \mid \forall \hat t\in[t_0,t] \ (\hat t, x(\hat t))\in\Omega\}$

$x_* = x(t_*)$,

נראה ש- $(\hat t, x(\hat t))\in\partial\Omega$

שלי

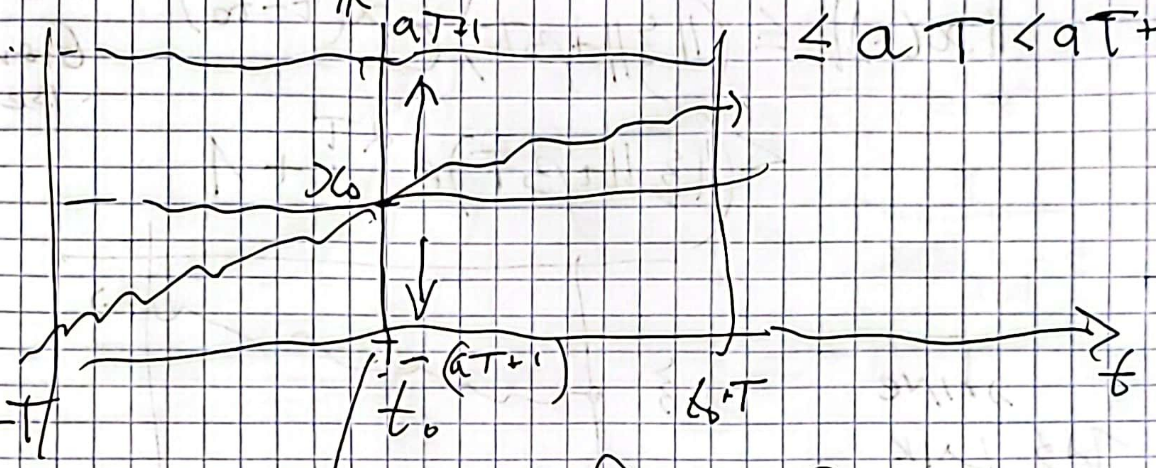
מ.ש.ל.

דוגמא: פתרון של $\dot x = f(t,x)$, $\|f\|\le a$, $f\in C$

$x\in\mathbb{R}^n$

כל פתרון אפשר להאריך עד ל $\pm\infty$ בזמן

$|\dot x|_{\mathbb{R}^n}\le a \Rightarrow \|x(t_0+T)-x(t_0)\| \le aT < aT+1$



אפשר להאריך כל פתרון עד לשפה

$\mathbb{R}^n$ ב

$\Omega: \begin{cases}\|x-x_0\|\le aT+1\\ |t-t_0|\le T\end{cases}$

$t\to-\infty, t\to\infty$ ל

מגיעים עד ל $t=t_0+T$ ו- $t=t_0-T$

דוגמא

4

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)$$

$x\in\mathbb{R}^n$, $A\in C$, $B\in C$
רציפים

⇐ ~~בהכל~~ כל פתרון 1. יחיד ([illegible] מקומי)

2. אפשר להאריך עד $\pm\infty$ בזמן

הוכחה:

$$\|A(t)\| \le \alpha(T) > 0$$
$$\|B(t)\| \le \beta(T) > 0$$

רציפות בכל $t\in[t_0-T, t_0+T]$, $\forall T>0$

$$x(t_0)=\xi$$

$t\ge t_0$: $\|x(t)\| \le \xi + \int_{t_0}^{t_0+T} \alpha \|x(s)\|\, ds + \int_{t_0}^{t_0+T} \beta \cdot ds$

פונקציה רציפה

$$\le \|\xi\| + \beta T + \alpha \int_0^T \|x(s)\|\, ds$$

$$\|x(t)\| \le (\|\xi\| + \beta T) e^{\alpha(t-t_0)}$$

Lemma Gronwall Bellman.

$$< (\|\xi\| + \beta T) e^{\alpha T} + 1$$

[illegible]

[illegible]

מ.ש.ל.

$\dot{x} = f(t,x)$, $\|f\| \le \alpha(t)\|x\| + \beta(t)$ דוגמא

$\alpha, \beta \in C$

אותה מסקנה

Lemma Grönwall - Bellman

(ללא הוכחה)

$$u(t) \le \gamma(t) + \int_{t_0}^{t} \omega(s)\,u(s)\,ds$$

$u, \gamma, \omega \in C[t_0, t_1]$, γ ו-δ, חיוביות

$$u(t) \le \gamma(t) \exp\left(\int_{t_0}^{t} \omega(s)\,ds\right)$$

לפי (Khalil)

(Wiki או)

דוגמא

$\dot{x} = x^2$ לא ליפשיץ גלובלית

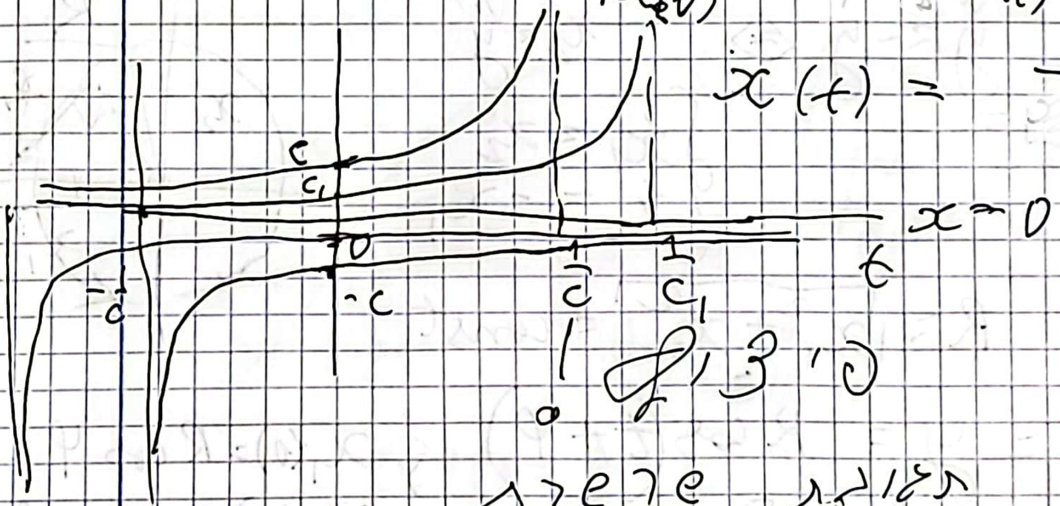
יש יחידות, פתרון $x = 0$

נגזור

$$\frac{\dot{x}}{x^2} = 1 \Rightarrow \int_0^t \frac{\dot{x}\,dt}{x^2} = \int_0^t dt = t$$

$$-\frac{1}{x}\Big|_{x(0)}^{x(t)} = \frac{1}{x(0)} - \frac{1}{x(t)} = t$$

$$x(t) = \frac{1}{\frac{1}{x(0)} - t}$$



Finite-time escape

מערכות אוטונומיות

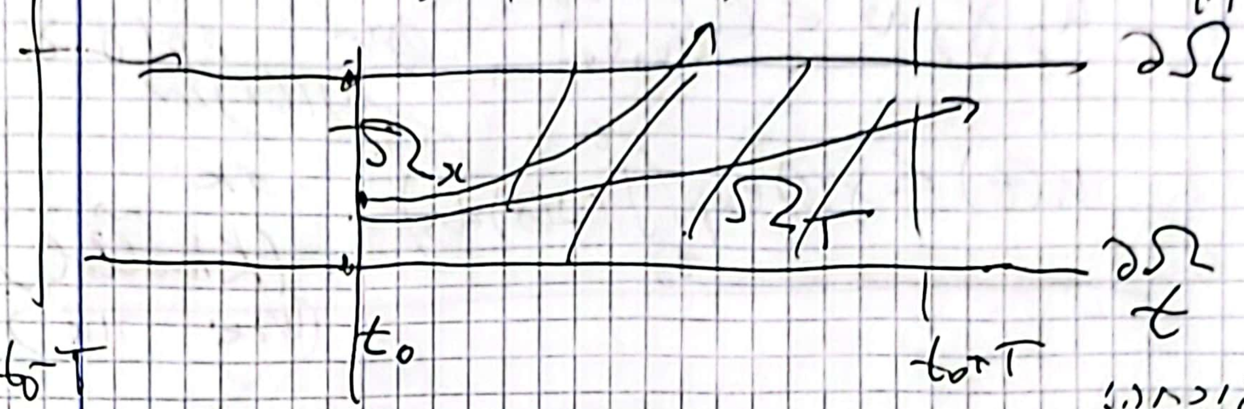
קומפקט

הזמן לא מופיע! $\dot{x}=f(x)$, $x\in\Omega_x\subseteq\mathbb{R}^n$, $C\subseteq G_x$

כל פתרון מוארך עד לשפת התחום
או עד לסוף הגבולות

$f\in C$

$\|f\|\le M$



הוכחה $\forall T$

הפתרון מוארך עד לשפה או עד ל $t=t_0+T$

$$\Omega_T=\left\{(t,x)\;\middle|\;\begin{matrix}x\in\Omega_x,\\ |t-t_0|\le T\end{matrix}\right\}$$

וכו'..

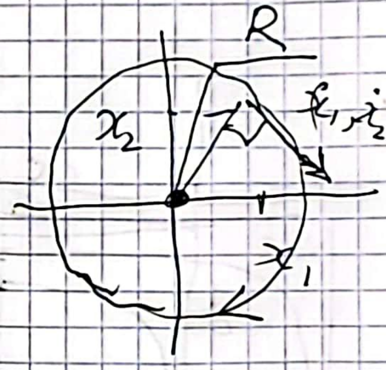
דוגמא:

$\cancel{\ddot{x}=-x}$

$\ddot{y}=-y \Leftrightarrow$ $x_1=y$, $x_2=\dot{y}$

$y=$

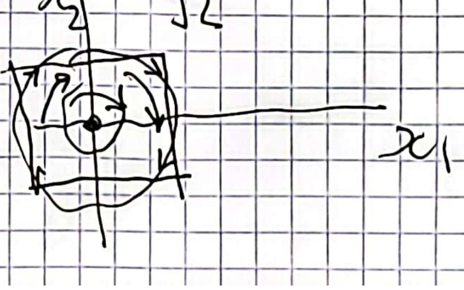
$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=-x_1\end{cases}$$



$$R=\sqrt{x_1^2+x_2^2}=const$$

$x_1=y=R\cos(t+\varphi)$, $x_1(0)=R\cos\varphi$

$x_2(0)=-R\sin\varphi$



$$y^{(n)} = F(t, y, \dots, y^{(n-1)})$$ משוואה אחת

$$x_1 = y,\ x_2 = \dot y, \dots, x_n = y^{(n-1)}$$

$F \in C$

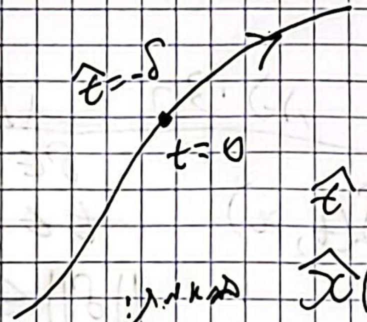
$$\begin{cases} \dot x_1 = x_2 \\ \vdots \\ \dot x_{n-1} = x_n \\ \dot x_n = F(t, x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

מסקנה

1. נניח' הוכחנו, משפט קיום לכל מע"ד
המערכת $\dot x = f(t,x),\ x \in \mathbb{R}^n$
אז לכל' הסדר $y^{(n)} = F(t, y, \dots, y^{(n-1)})$

2. אם יש תנאי' לפיכך לכל' x או $y, \dots, y^{(n-1)}$
אז המערכת יחידה / פתרון כללי n-יים
להכיל n פרמטרים / תנאים.

במקרה האוטונומי יחידות היא שונה!



$$\dot x = f(x)$$

אפשר לספור שמן מחדש בכל רגע.

$$\hat t = t - \delta$$

$x(t)$ פתרון $\Rightarrow$ גם הוא: $\hat x(t) = x(t+\delta)$, $\delta \in \mathbb{R}$ מאמת!

$$\dot{\hat x}(t) = \frac{d}{dt} x(t-\delta) = \dot x(t-\delta) = f(x(t-\delta)) = f(\hat x(t))$$

דרך כל נקודה עובר קו פתרון אחד (קו פנ)

תלות בפרמטר

$f \in C^k$ ב t,x

משפט (ב Arnold)

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(t_0) = \xi \end{cases} \Rightarrow x(t) = \Phi(t, t_0, \xi), \quad \underline{\underline{\Phi \in C^k}}$$

הוכחה, קשה!

<u>פרמטר:</u>

$$f \in C^k \quad \begin{cases} \dot{x} = f(t,x,p), \; x \in \mathbb{R}^n, \; p \in \mathbb{R}^\ell \\ x(t_0) = \xi \end{cases}$$

$$x(t) = \Phi(t, t_0, \xi, p) \in C^k \;!!$$

<u>הוכחה:</u>

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x,p) \\ \dot{p} = 0 \\ x(t_0) = \xi, \; p(t_0) = p_0 \end{cases} \Rightarrow x(t) = \Phi(t, t_0, \xi, p_0)$$

מש"ל.

כך מצאנו ... !

<u>תלות רציפה בת"ה</u>

$\delta \in C$

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) + \delta(t,x) & t \in [t_0, t_1] \\ x(t_0) = \xi & \|\delta\| \le \delta_0 \end{cases}$$

$\delta_1, \delta_2, \dots \rightrightarrows 0$ $\lim_{j \to \infty} \delta_j = 0 \Rightarrow \tilde{x}_j(t)$, $t \in [t_0, t_1]$

בשלילה, שלה

$\Rightarrow \exists j_1, j_2, \dots : x_{j_k} \rightrightarrows x$, $k \to \infty$

זו אתרה

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta_0 > 0 : \|\delta\| \le \delta_0 \Rightarrow \|\tilde{x} - x\| \le \varepsilon \quad t \in [t_0, t_1]$$

תזכורת

9

נורמה: $\|x\|$: 1. $\|x\|\ge 0$, $\|x\|=0 \iff x=0$

2. $\|x_1+x_2\| \le \|x_1\|+\|x_2\|$

$x\in\mathbb{R}^n$, $\|x\| = (x_1^2+\dots+x_n^2)^{\frac12}$ אוקלידי

נורמה של מטריצה: רוצים $\|Ax\|\le\|A\|\|x\|$

$$\|A\| = \sup_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \max_{\|x\|=1}\|Ax\|$$

Euclidis : $\|x\|^2 = x^Tx$ אם

$$\|Ax\|^2 = (Ax)^TAx = x^TA^TAx = \lambda_1\tilde{x}_1^2+\dots+\lambda_n\tilde{x}_n^2$$

תבנית ריבועית

$$\|A\| = \sqrt{\lambda_{max}(A^TA)} \geq 0$$

[illegible] ערכים עצמיים eigenvalues של A^TA (סימטרית, אי שלילית)

משוואת Newton, מערכות קונסרבטיביות (Arnold)

$x\in\mathbb{R}^n$, $U:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$

$$\ddot{x} = F(x) = -\left[\frac{\partial}{\partial x}U(x)\right]^T = -(\nabla U(x))^T$$

$$\boxed{\ddot{x} = -(\nabla U(x))^T}$$

גרדיאנט, שורה

$U(x)$ - אנרגיה פוטנציאלית, potential energy

$\frac12\dot{x}^T\dot{x}$ - אנרגיה קינטית, kinetic energy

מצב
$x\in\mathbb{R}^n$
$\dot{x}\in\mathbb{R}^n$
$\mathbb{R}^{2n}$

$$E = \frac12\dot{x}^T\dot{x} + U(x)$$

אנרגיה שלמה

הגדרה: $\dot{x} = f(t,x)$, $x\in\mathbb{R}^n$, $I:\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}$

$I(t,x)$ נקרא אינטגרל ראשון אם לכל פתרון $x(t)$

$$I(t, x(t)) = \text{const}$$

הקבוע יהיה אחר בפתרון אחר

למה: E - אינטגרל ראשון של משוואת Newton

$$\dot{E} = \frac{d}{dt}\left(\frac12\dot{x}^T\dot{x} + U(x)\right) = \underbrace{\frac12\ddot{x}^T\dot{x} + \frac12\dot{x}^T\ddot{x}}_{\ddot{x}^T\dot{x}} + U'(x)\dot{x} = (\ddot{x}^T + \nabla U(x))\dot{x} = 0$$

מ.ש.ל.

משפט $V\in C^2$, $\forall x\; U(x)\geq 0$ (או חסומה מלמטה)
$V\geq c \Rightarrow V:=V-c$

$\Leftarrow$ כל פתרון אפשר להאריך עד $t\to\pm\infty$

הוכחה: $E=\frac{1}{2}\|\dot{x}\|^2+U(x)\;\cancel{\ }=\text{const}$

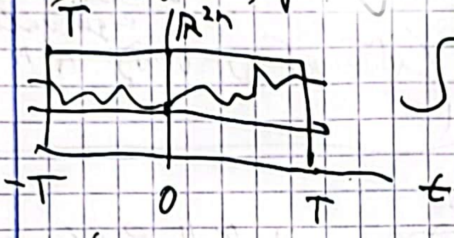
$$\Rightarrow \|\dot{x}\|=\sqrt{2(E-U(x))}\leq\sqrt{2E}<\sqrt{2E}+1$$

$t\in\mathbb{R}$,

$$\|x\|=\|x(0)+\int_0^t\dot{x}(s)\,ds\|\leq\|x(0)\|+|t|\sqrt{2E}$$

$$<\|x(0)\|+|t|\sqrt{2E}+1$$

כל פתרון מוארך עד לשפת Ω

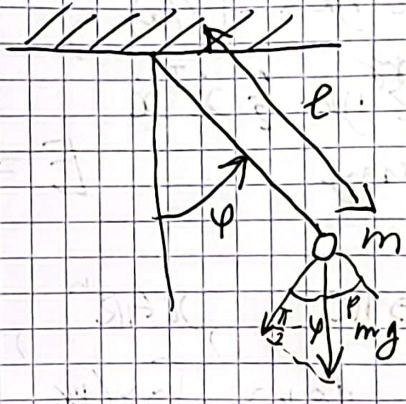


$$\Omega_T=\begin{cases}(x,\dot{x})\in\mathbb{R}^{2n}, & |t|\leq T\\ \|\dot{x}\|\leq\sqrt{2E}+1\\ \|x\|\leq\|x(0)\|+T\sqrt{2E}+1\end{cases}$$

מ.ש.ל.

מקרה פרטי: מישור פאזה, $n=1$

דוגמא: מטוטלת pendulum



Newton

$$m\ell^2\ddot{\varphi}=-mg\ell\sin\varphi$$

מומנט אינרציה   מומנט כוח

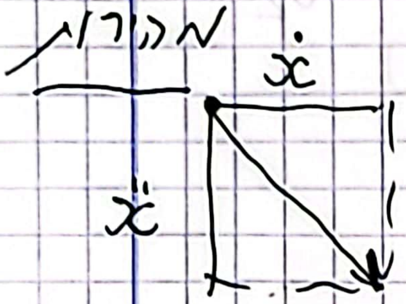
$$\frac{\ell}{g}\ddot{\varphi}=-\sin\varphi \qquad \tau=\sqrt{\frac{g}{\ell}}\,t\Rightarrow\frac{d^2}{d\tau^2}\varphi=-\sin\varphi$$
$$\varphi=\varphi(\tau)$$

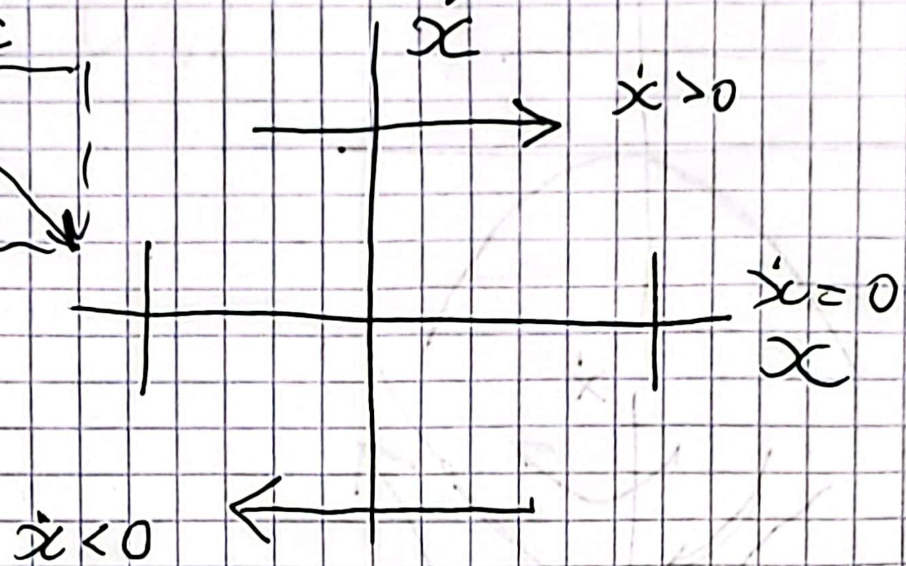
"מטוטלת מתמטית" $\ddot{x}=-\sin x$
Arnold

$x \in \mathbb{R}$, $\ddot{x} = -\sin x$ משוואת Newton

$$\ddot{x} = -\frac{\partial}{\partial x}(-\cos x), \quad V = -\cos x$$

$$E = \frac{1}{2}\dot{x}^2 - \cos x = \text{const}$$





מישור הפזה

גפור במימד ל ODE מסוג $\ddot{x} = f(x)$

כאשר $\dot{x}=0$ מקבלים ר. רכיב אחד של המהירות!

מהירות $= (\dot{x}, \ddot{x})$