1

מבוא למערכות דינמיות
ושימושיהן

0372-4029

15:00 – 18:00, הולצבלט, חדר 007 ~~006 שרייבר~~

שעות קבלה: לפי הצורך בZoom

או בשרייבר 1236,

levant@tauex.tau.ac.il

ספרות:

Arnold Ordinary Differential Equations

May Be Khalil Nonlinear systems, 2001

Filippov Differential equations with discontinuous Right-hand Sides 1988, 2010

Shtessel, Edwards, Fridman, Levant Sliding mode control and Observation, 2013

Boyce, DiPrima Elementary DEs and Boundary Value Problems

www.tau.ac.il/~levant/dynsys/

תוכנית הקורס

1. ODE-1 crash course

תוספות: משפטי השוואה, Abel-Liouville מוכלל

פתרון בטורי חזקות: שערוך השארית

2. תורת היציבות לפי Lyapunov

3. משוואות דיפרנציאליות עם צד ימין לא רציף

שימושים, הכללות דיפרנציאליות

קיום הפתרון

4. מבוא קצר לתורת הבקרה ועיבוד אותות

גזירה נומרית

בסוף: עבודת בית; כמה בעיות פשוטות

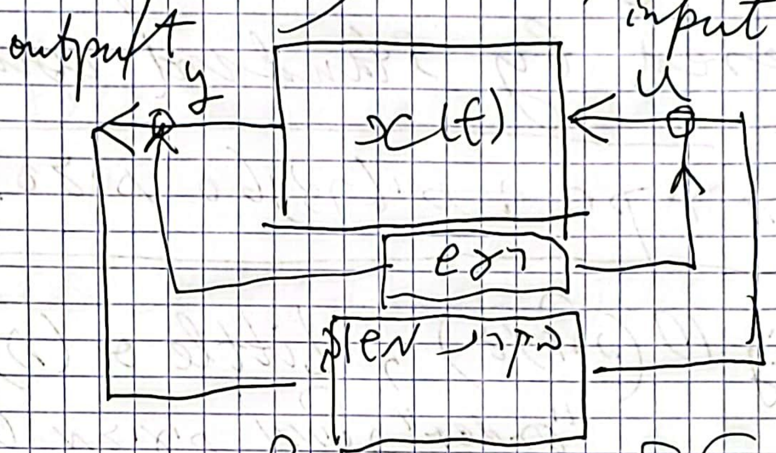
וסימולציה אחת

הרצאה 1

מודל של מערכת דינמית

dynamic system

כל הגדלים המשתנים בזמן אשר ניתן
לעין - הפלטים outputs שלו (הגורם) כלל (נמדדים)
אפשר להשפיע עליו ע"י הקלטים inputs
יש לו מצב פנימי (state) אשר מגדיר
את הפלטים ומשתנה בזמן



הזמן (t) יכול להיות רציף או מקוטע discrete.

יכול להיות שאין קלט או שהוא לא ממש משפיע על הגדלים

ODE

דוגמאות:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x), & x\in\mathbb{R}^n \\ y = x \end{cases}$$

ODE with a control feedback

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x,u) \\ y = \varphi(t,x) \\ u = U(t,y) \end{cases} \qquad x\in\mathbb{R}^n,\ y\in\mathbb{R}^m,\ u\in\mathbb{R}^k$$

dynamics can be added here

These are the main cases we consider

Other examples: economic processes
pandemic, climate change
etc. Stochastic dynamics
PDE, etc.

We don't assume any deep knowledge of ODEs.

Thus it is actually a crash course in ODE + advanced topics not covered by standard courses

---

מוסכמים אסימפטוטיים ; סדרים,

---

1. Big O (גדולה), Little o (קטנה)

o, O סימנים מהמילה "order"

Paul Bachmann 1894, Edmund Landau 1909

נקח רק מקרה סקלרי (עיקרי)

נניח $A \in \{-\infty, \infty, \mathbb{R}\}$

$\mathbb{R} = \{a \mid a \in \mathbb{R}\}$

סביבת ε של A (ε-vicinity)

$\underline{\varepsilon \in \mathbb{R}}$ $V_\varepsilon(\infty) = \{x \in \mathbb{R}, x > \varepsilon\}$

$V_\varepsilon(-\infty) = \{x \in \mathbb{R}, x < \varepsilon\}$

$\underline{\varepsilon > 0}$ $V_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R} : |x-a| < \varepsilon, x \neq a\}$
$a \in \mathbb{R}$

נניח $f,g: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$

<u>מה מוקשר</u> יפוע ב-$x\to A$ (חייב להגדיר!)

בצורה,

<u>הגדרה</u> <u>Definition</u> $f(x)=O(g(x)),\ x\to A$

$$\exists C>0\ \forall\varepsilon\in\mathbb{R}\ (\varepsilon>0,\ A\in\mathbb{R}):$$

$$x\in V_\varepsilon(A)\longrightarrow |f(x)|\le C|g(x)|$$

במילים: $f(x)$ הוא מסדר גודל של $g(x)$ כאשר $x\to A$, (או קטן יותר)

מקרה: אם $g(x)=0$ ב $x\in V_\varepsilon(A)$ אז $f(x)=0$

קטנה

<u>הגדרה</u> <u>Definition</u> $f(x)=o(g(x))$

$$\forall\delta>0\ \exists\varepsilon\in\mathbb{R}\ (\varepsilon>0,\ A\in\mathbb{R}\ \delta):$$

$$x\in V_\varepsilon(A)\longrightarrow |f(x)|\le\delta|g(x)|$$

למקרה $g=0$

<u>במילים:</u> בהשוואה ל $g(x)$ הפונקציה $f(x)$

היא זולה א(פ'י)זניחה כאשר $x\to A$

$\boxed{g(x)\ne0 \Rightarrow \lim_{x\to A}\frac{f(x)}{g(x)}=0}$ (מסדר גבוה יותר).

<u>דוגמאות</u> $10^6=O(10^{-6})$ $\quad x\to A$

$\sin x=O(1),\ \cos x=O(1),\ x\to\infty$

$\frac{o(x)}{x}=o(1),\ \sin x=o(1),\ x\to0$

רציפות: $f(x)-f(a)=o(1),\ x\to a$

ה ע גם $O(g(x)),\ o(g(x))$ - קבוצות אשר לא מספרים ה"$\in$"

$$\ln x = o(x),\quad x \to \infty$$

$$\ln x = O(x),\quad x \to \infty$$

$$x \to 0 \Rightarrow \alpha > \beta \quad x^{\alpha} = o(x^{\beta})$$

$$|\ln x|^{k} = o(x^{\alpha}),\ \alpha < 0,\ k > 0$$

$x = o(1),\ x = o(\frac{1}{x})$	$1 \neq O(x)$
$x = O(1),\ x = O(\frac{1}{x})$	$\frac{1}{x} \neq o(x),\ O(x)$

גזירות ב-a $\quad a \in \mathbb{R},\ \Delta x \to 0$ **עובדה**

$$f'(a) = C \Leftrightarrow \cancel{\frac{f(x)-f(a)}{}} \text{ קטנה}$$

$$f(a+\Delta x) - f(a) - C\Delta x = o(\Delta x)$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{f(a+\Delta x) - f(a) - C\Delta x}{\Delta x} = o(1)$$

$$\frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} - C = o(1)$$

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} = C$$

עובדה

$$x \to A \quad O(|x|^{\alpha})\, O(|x|^{\beta}) = O(|x|^{\alpha+\beta})$$

$$A \in \{0, \infty, -\infty\} \quad o(|x|^{\alpha})\, o(|x|^{\beta}) = o(|x|^{\alpha+\beta})$$

שימוש לא נכון

$$|f(x)| \leq O(x^2)$$

$$|f(x)| \geq o(x)$$

שגיאה!

אין משמעות!

Examples:

$f(x)$ bounded
חסומה בסביבת A $\iff f(x)=O(1) \quad x\to A$

$\lim_{x\to A} f(x)=0 \iff f(x)=o(1)$

אם בסביבת A כך ש $g(x)\neq 0$ אז

$f(x)=o(g(x)) \iff \lim_{x\to A}\frac{f(x)}{g(x)}=0, \quad \frac{f(x)}{g(x)}=o(1)$

$f(x)=O(g(x)) \iff \frac{f(x)}{g(x)}=O(1)$ חסומה,

2. אותיות יווניות

α - alpha, β - beta

λ - lambda, μ - mu

[illegible] ε - epsilon $\leftarrow$ ζ zeta

ξ - xi, η - eta, ν - nu

3. Differential

$f(x+\Delta x)-f(x)-k\Delta x = o(\Delta x) \iff f'(x)=k$ ש [illegible] $\Delta x\to 0$

קטן,

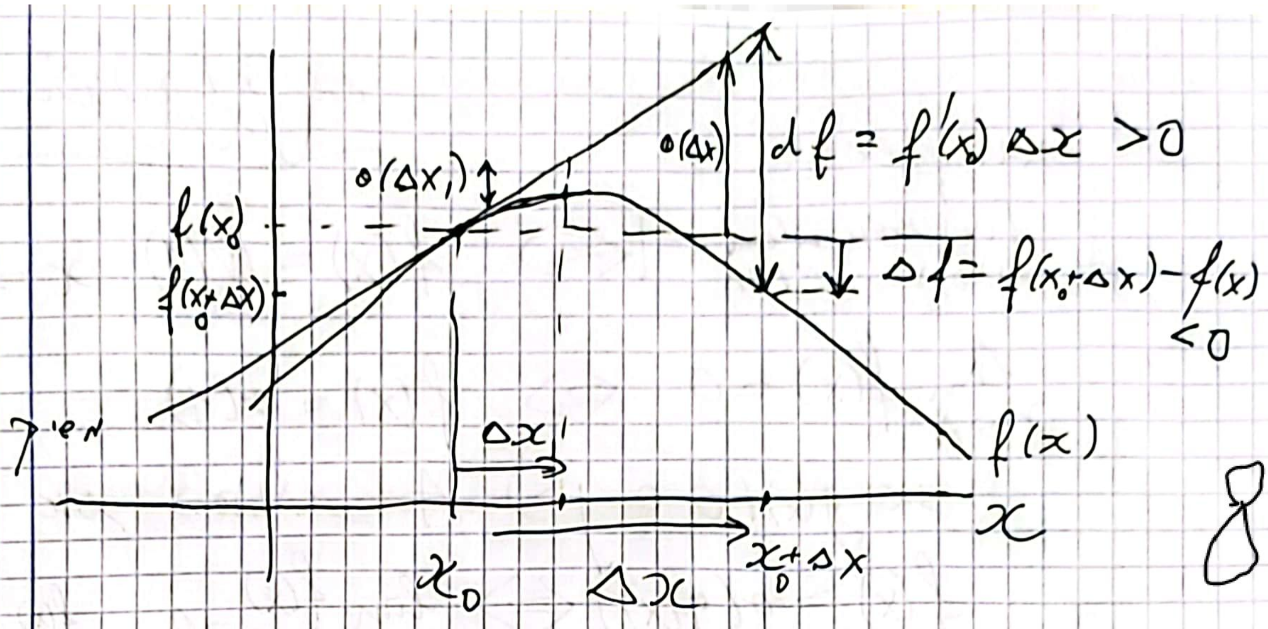
$$f(x+\Delta x)=f(x)+\underbrace{f'(x)\Delta x}_{df(x,\Delta x)}+o(\Delta x)$$

[illegible]

Leibnitz: $df = df(x) = df(x,\Delta x)$

[illegible]!

$dx(x,\Delta x) = x'(x)\cdot\Delta x = 1\cdot\Delta x = \Delta x$



8

(פונקציה מורכבת) $f(x) = \sin x, \quad x = t^2$ נניח

composite function

$$df(x,\Delta x) \stackrel{?}{=} df = df(t,\Delta t) \quad !!$$

$$df(t,\Delta t) = \underbrace{\cos t^2}_{f'(x)} \cdot \underbrace{2t\cdot\Delta t}_{dx(t,\Delta t)} = \cos x \cdot dx \neq \cos x\,\Delta x$$

$x = x(t)$

$$\Delta x = (t+\Delta t)^2 - t^2 = 2\Delta t\cdot t + \Delta t^2$$

$$\Delta x - dx = o(\Delta t) = \Delta t^2 \quad \text{אבל}$$

$$dx = \underbrace{2t}_{\dot{x}}\cdot\Delta t$$

כך נקרא

"the invariance of the form of the first differential"

אבל לא

$$2t\Delta t = dx(t,\Delta t) \neq dx(x,\Delta x) = \Delta x$$

כי אין פונקציות של ארגומנטים שונים!

ההפרשים כאן מתפקדים כאינדקסים

ולכן מצדיק את הסימון!

4. דיפרנציאל של כמה ארגומנטים

$$f((x,y)+(\Delta x,\Delta y)) = f(x,y) + f'_x(x,y)\Delta x + f'_y(x,y)\Delta y + \underbrace{o(\Delta x,\Delta y)}_{o(|\Delta x|+|\Delta y|) = o(\|\Delta x,\Delta y\|)}$$

עורמה, כלפניי

לכן!

9

$$d_x f(x,y) = f'_x(x,y)\Delta x$$

$$d_y f(x,y) = f'_y(x,y)\Delta y$$

$$df = f'_x(x,y)\Delta x + f'_y(x,y)\Delta y$$

$$\boxed{df = df_x + df_y}$$

והשערה!

5. דיפרנציאלים מסדר גבוה

$$d^2 f(x,\Delta x) = d[f'(x)\Delta x] = f''(x)\Delta x^2$$

מתייחסים ל Δx כקבוע (בציורי, לחקרי)

$$\Rightarrow d^k f(x,\Delta x) = f^{(k)}(x)\Delta x^k$$

6. דיפרנציאלים מסדר גבוה של כמה ארגומנטים

$$d^2 f(x,y,\Delta x,\Delta y) = d(f'_x(x,y)\Delta x + f'_y(x,y)\Delta y)$$

$$= f''_{xx}(x,y)\Delta x^2 + 2f''_{xy}(x,y)\Delta x\Delta y + f''_{yy}(x,y)\Delta y^2$$

$$d^3 f = d(d^2 f) =$$

$$= f'''_{xxx}\Delta x^3 + 3f'''_{xxy}\Delta x^2\Delta y + 3f'''_{xyy}\Delta x\Delta y^2 + f'''_{yyy}\Delta y^3$$

.7 נוסחת Taylor

$$f: R^n \to R \qquad x=(x_1, x_2 \dots x_n)^T$$

~~$y=(y_1, y_2 \dots y$~~

[illegible] $\Delta x = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)^T$

Algebra

$$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) = \frac{d f(x,\Delta x)}{1!} + \dots + \frac{d^k f(x,\Delta x)}{k!} + R_k$$

אם $f \in C^k$ (גזירה ברציפות k פעמים)

$\boxed{\text{צורת Peano}}$ $R_k(x,\Delta x) = o(\|\Delta x\|^k)$ אז

Residual, שארית

$$\|\Delta x\| = (\Delta x_1^2 + \dots + \Delta x_n^2)^{\frac{1}{2}} \quad \text{or} \quad \|\Delta x\| = \max(|\Delta x_1| \dots |\Delta x_n|)$$

etc.

$k=0 \Rightarrow$ הגדרת רציפות

$k=1 \Rightarrow$ גזירות (differentiability)

אם f גזירה $k+1$ פעמים ו $f \in C^k$ (ברציפות)

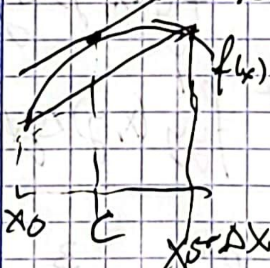
$\Leftarrow$

$$R(x,\Delta x) = \frac{1}{(k+1)!} d^{k+1} f(x+\theta\Delta x, \Delta x)$$

$$\exists \theta \in (0,1)$$

$\boxed{\text{Lagrange}}$ צורת

$k=0 \Rightarrow$ The Lagrange theorem



$$\Delta f = f'(c)\Delta x, \quad c = x_0 + \theta \Delta x$$

8. מקלורין   נוסחת Taylor מקלורין

11

$$f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$

Peano: $f(x+\Delta x)-f(x) = \frac{df(x,\Delta x)}{1!} + \frac{1}{2!}d^2 f(x,\Delta x) + \dots + \frac{1}{k!}d^k f(x,\Delta x) + o(\|\Delta x\|^k)$

צורת Lagrange לא קיימת כאן

9. Jacobi Matrix

$$f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n,\quad f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$$

$$df(x,\Delta x) = \begin{pmatrix} df_1 \\ \vdots \\ df_n \end{pmatrix} = f'(x)\, dx(x,\Delta x)$$

$$\begin{pmatrix} df_1 \\ \vdots \\ df_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} f'_{1x_1} & f'_{1x_2} & \dots & f'_{1x_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f'_{nx_1} & f'_{nx_2} & \dots & f'_{nx_n} \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix}$$

Jacobi Matrix: $f'(x) = \begin{pmatrix} \nabla f_1 \\ \vdots \\ \nabla f_n \end{pmatrix}$ $df = \nabla f(x)\, dx$

גרדיאנטים   כן מקום

משוואות דיפרנציאליות רגילות

ODE

Ordinary Differential Equations

בצורה נורמלית

$x \in \mathbb{R}^n$ $\qquad \dot{x} = f(t,x) \qquad \dot{x} = \frac{d}{dt}x$

$t \in \mathbb{R}$ זמן $\qquad\qquad$ נגזרת לפי הזמן t

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ \dot{x}_2 = f_2(t, x_1, \dots, x_n) \\ \dots \\ \dot{x}_n = f_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

Example $\begin{cases} \dot{x}_1 = t\cos(x_1 - x_2) \\ \dot{x}_2 = x_1^2 - t x_2 \end{cases}$

משוואה מסדר גבוה ניתן לפרק
למערכת משוואות מסדר ראשון בצורה נורמלית

$$y^{(n)} = F(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}), \quad F: \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$$

$$\underbrace{x_0 = y,\ x_1 = \dot{y}, \dots, x_{n-1} = y^{(n-1)}}_{n} \quad \text{נסמן}$$

$$y^{(n)} = \begin{cases} \dot{x}_0 = x_1 \\ \dot{x}_1 = x_2 \\ \dots \\ \dot{x}_{n-2} = x_{n-1} \\ \dot{x}_{n-1} = F(t, x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) \end{cases} \quad \overset{\text{שקול}}{\Longleftrightarrow} \quad \dot{x} = f(t,x), \ x \in \mathbb{R}^n$$

תנאי התחלה:

$$x(t_0)=\begin{pmatrix} x_0(t_0) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t_0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y(t_0) \\ \dot y(t_0) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t_0)\end{pmatrix}$$

דוגמא

1. $y^5-\dot y^3+t=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dot x_0 = x_1 \\ x_0^5-\dot x_1^3+t=0 \end{cases}$

סדר 2 — לא בצורה נורמלית

2. $\dddot y - t y^3 + \ddot y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dot x_0 = x_1 \\ \dot x_1 = x_2 \\ \dot x_2 = t x_0^3 - x_2 \end{cases}$ בצורה נורמלית

Autonomous ODE

$\dot x = f(x)$ — משוואה אוטונומית

אם f לא תלוי ב-t

$$\begin{cases} \dot x_1 = x_1 - x_2^2 \\ \dot x_2 = \cos x_1 \end{cases}$$

x: state, phase — מצב

extended state — מצב מורחב (t,x)

משפט קיום ויחידות (כללי)

Cauchy Problem $\begin{cases} \dot x = f(t,x),\ x\in\mathbb{R}^n \\ x(t_0)=\xi \end{cases}$ תנאי התחלה

$x(t)=\,?$

משפט Peano: אם $f\in C$ (רציפה) אז קיים פתרון מקומי (יכולים להיות כמה פתרונות)

יחידות

פתרון יחיד (Uniqueness)

תנאי Lipschitz

$f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

מקיימת תנאי ליפשיץ בתחום Ω אם קיים L כך שלכל $x,y \in \Omega$

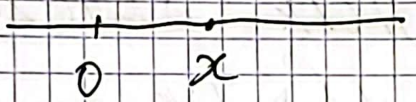
$$\|f(x)-f(y)\| \leq L\|x-y\|$$

L נקרא קבוע ליפשיץ

דוגמא $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=|x|$

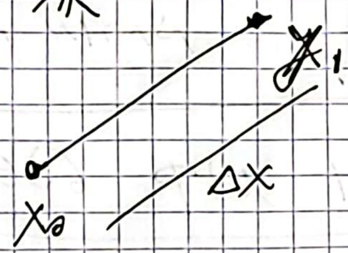
$$\big||x|-|y|\big| \leq |x-y|, \quad L=1$$

בדיקת מקרים



דוגמא כל פונקציה גזירה, ברציפות מקיימת תנאי Lipschitz בקונבקס,

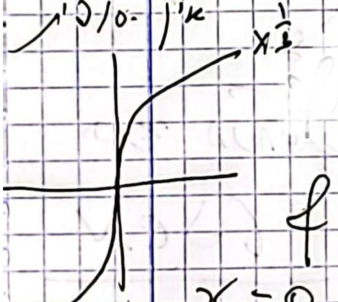
$f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$



$$f(x_1)-f(x_0)=f'(c)\underbrace{(x_1-x_0)}_{\Delta x}$$

Taylor $k=0$

$$L=\max_{\Omega}|f'(x)| \Rightarrow |\Delta f| \leq L\|\Delta x\|$$



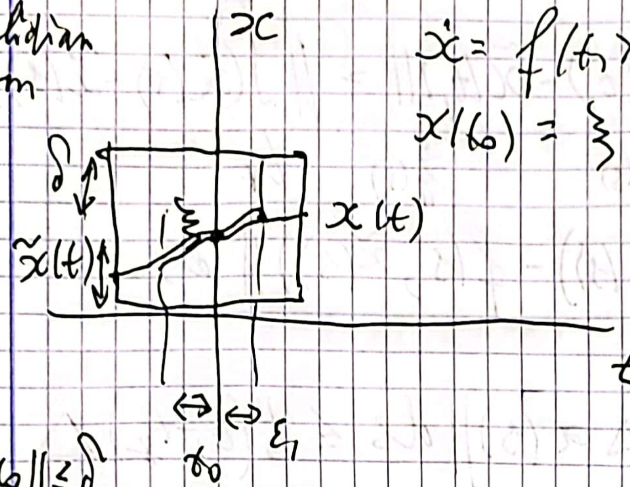
דוגמא $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$f(x)=x^{\frac{1}{3}}$ אין תנאי Lipschitz!

$$x_0=0, \quad \frac{|f(x_0+\Delta x)-f(x_0)|}{|\Delta x|}=\frac{|\Delta x|^{\frac{1}{3}}}{|\Delta x|}=|\Delta x|^{-\frac{2}{3}}$$

לא חסום

Euclidian norm



$\dot{x} = f(t, x)$ $\quad f \in C$

$x(t_0) = \xi$

משפט

קיום ויחידות הפתרון הלוקלי

אם f רציפה

ליפשיץ ב-x

$\exists L > 0:$

$\forall x_1, x_2 : \|f(t,x_1) - f(t,x_2)\| \le L \|x_1 - x_2\|$

$\|x - x_0\| \le \delta$

$\|t - t_0\| \le \varepsilon$

$\|f\| \le M$

⇐ הפתרון יחיד

אם יש שני פתרונות שמקיימים אותו תנאי התחלה

בתחום יותר (קטן!)

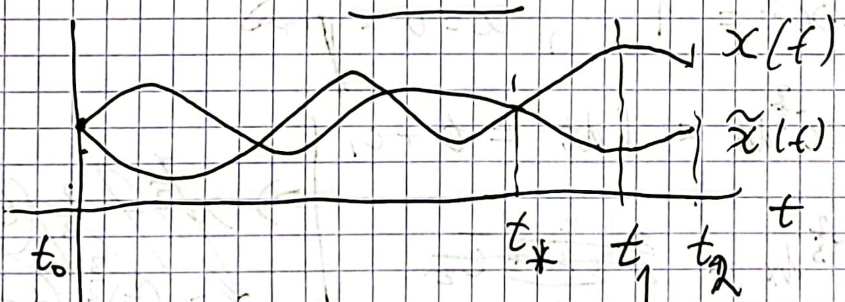
⇐ בתחום ההגדרה המשותף הם זהים

1. קיום ה פתרון ב $t \in [t_0 - \varepsilon_1, t_0 + \varepsilon_1]$

$\varepsilon_1 = \min\left\{\frac{\delta}{M}, \varepsilon\right\}$

15

2. הוכ' יחיד' : הוכחה



Send

$x(t_0) = \tilde{x}(t_0)$, $\quad \tilde{x}(t_2) \neq x(t_2)$, $\quad t_2 > t_0$

$t_* = \sup\{t \in [t_0, t_2] : \tilde{x}(t) = x(t)\}$

$t_0 \in$, $t_2 \notin$ סגור

ברור: $x(t_*) = \tilde{x}(t_*)$

מרציפות

$\forall t > t_* \Rightarrow x(t) \neq \tilde{x}(t)$,

$\Delta = \max_{t \in [t_*, t_2]} \|\underbrace{x(t) - \tilde{x}(t)}_{\Delta x(t)}\|$

$t_1 = \arg\max_{[t_*, t_2]} \|\Delta x(t)\|$

$$\Delta = \|x(t_1) - \tilde{x}(t_1)\| = \left\| \int_{t_*}^{t_1} (\dot{x}(s) - \dot{\tilde{x}}(s))\, ds \right\|$$

$$= \int_{t_*}^{t_1} \| \underbrace{f(s, x(s))}_{\dot{x}(s)} - \underbrace{f(s, \tilde{x}(s))}_{\dot{\tilde{x}}(s)} \| \, ds$$

$$\le L \int_{t_*}^{t_1} \|\Delta x(s)\| \, ds \le L(t_1 - t_*)\Delta$$

$$\le L(t_2 - t_*)\Delta$$

עכשיו נבחר t_2 קרוב יותר ל t_* מימין

עד שנקבל $L(t_2 - t_*) < \frac{1}{2}$

אז $\Delta \le \frac{1}{2}\Delta$

$$\frac{1}{2}\Delta \le 0 \Rightarrow \Delta = 0$$

מ.ש.ל.

דוגמא

$\dot{x} = 3x^{\frac{2}{3}}$ אין רציפות Lipschitz

$\frac{1}{3}\dot{x}x^{-\frac{2}{3}} = 1$, $x = 0$ - פתרון

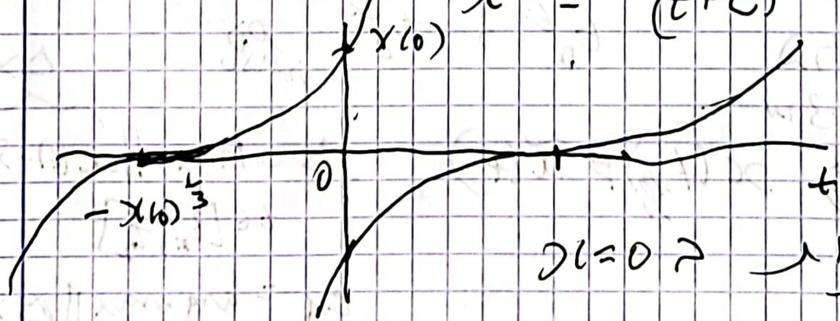
$$\int \frac{1}{3}\dot{x}x^{-\frac{2}{3}} dt = \int dt = t + c_1$$

$$\int \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} dx = x^{\frac{1}{3}} + c_2$$

$\Rightarrow$

$$x^{\frac{1}{3}} = t + c \qquad c = +x(0)^{\frac{1}{3}}$$

$$x = (t+c)^3 = \left(t + x(0)^{\frac{1}{3}}\right)^3$$



∞ פתרונות ב $x=0$