14/10/2009

<u>תרמודינאמיקה – תרגיל מספר 1</u>

נגזרת ודיפרנציאל

1. משוואת המצב של גז אידיאלי הנה: $PV = nRT$

כאשר: P – הלחץ, V – הנפח, n – מספר המולים, T – הטמפרטורה ו R - קבוע הגזים.

בהנחה שמספר המולים קבוע,

א. מהו הדיפרנציאל השלם של V כאשר n קבוע. (הנחייה: רשמו קודם את הפונקציה של V, ואז מצאו את הדיפרנציאל).

ב. מהו הדיפרנציאל השלם כאשר מתאפשר שינוי במספר המולים?

2. א. השתמשו בהגדרת הנגזרת החלקית
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}\right]$$

בכדי להוכיח כי עבור פונקציה "טובה" מתקיים:
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

רמז - צאו מן הקשר הבא:
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

ב. השתמשו בהגדרת הנגזרת על מנת למצוא את הנגזרת של f=lnx.

רמז- כדאי להשתמש בפיתוח טור טיילור הבא: $\ln(1+y) \sim y$ ΩÀ– y«1.

3. א. משקולת בעלת מסה m תלויה על קפיץ וחופשית לנוע בכל הכיוונים (x, y, ו z). האנרגיה הפוטנציאלית שלה נתונה ע"י:

$$E = \tfrac{1}{2}k[(z-z_0)^2 + (y-y_0)^2 + (x-x_0)^2] + mgz$$

כאשר k הוא קבוע הקפיץ.

מהו הדיפרנציאל של האנרגיה? האם הוא שלם?

ב. נתון הדיפרנציאל הבא: $df = x^2dy + yxdx$ האם הוא שלם? הוכיחו.

ג. תנו דוגמא לדיפרנציאל שאינו שלם (מלבד העבודה)

4. משוואת הגזים של ואן דר-ואלס ניתנת ע"י השוויון $\left(P + \frac{a}{v^2}\right)(v-b) = RT$.

כאשר a ו b הינם קבועים, ו v ו T הם הפרמטרים החופשיים.

א. מהו הדיפרנציאל של P?

ב. הראו שהוא שלם.

5. נגזרות חלקיות וגדלים תרמודינאמים:

א. הוכיחו, ע"י גזירה מפורשת, כי עבור גז אידיאלי ($PV=nRT$) מתקיים הקשר הכללי שהוכח בכיתה (למספר מולים קבוע): $\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V=-1$.

ב. עבור גז ואן-דר-ואלס $\left(P+\frac{a}{v^2}\right)(v-b)=RT$ מהו $\left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_T$? (חשבו תחילה מהי הדרך הנוחה ביותר למצוא זאת, ישנן שתי דרכים לא מסובכות, יחסית ;-)

6. א) השתמשו בהגדרת הנגזרת על מנת להוכיח את כלל השרשרת עבור פונקציה של משתנה אחד:

$$\frac{df\left(g(x)\right)}{dx}=\frac{df}{dg}\frac{dg}{dx}$$

רמז: השתמשו בשני פיתוחי טיילור

ב) עבור הפונקציה: $z(x_1,x_2)=x_1{}^2+x_2$, המשתנים x_1 ו- x_2 הינם פונקציות של y_1 ו- y_2: $x_1=2y_1$ ו- $x_2=y_1y_2$. הראו מפורשות (על ידי הצבה וגזירה ישירה של z והשוואת התוצאה לגזירה לפי כלל השרשרת) שמתקיים כלל השרשרת:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y_1}\right)_{y_2}=\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\right)_{x_2}\left(\frac{\partial x_1}{\partial y_1}\right)_{y_2}+\left(\frac{\partial z}{\partial x_2}\right)_{x_1}\left(\frac{\partial x_2}{\partial y_1}\right)_{y_2}$$

.