26/4/2006

כימיה פיזיקלית 2 – תרגיל מספר 6
תנע זוויתי

(25 נק') **1.** הוכיחו כי אם אופרטור כלשהו חילופי עם שניים מבין רכיבי התנע הזוויתי, אזי הוא חילופי גם עם הרכיב השלישי.

(25 נק') **2.** א. הוכיחו כי הפונקציות הספריות-הרמוניות $Y_l^m(\theta,\phi)$ עצמיות לאופרטור $\hat{L}_x^2+\hat{L}_y^2$. מהם הערכים העצמיים המתאימים? (רמז: אין צורך להפעיל את $\hat{L}_x^2+\hat{L}_y^2$ על $Y_l^m(\theta,\phi)$ במפורש!)

ב. מודדים את ערכו של רכיב התנע הזוויתי לאורך ציר z $(\hat{L}_z)$ של חלקיק שפונקציית הגל שלו עצמית לאופרטור $\hat{L}^2$ עם ערך עצמי $20\hbar^2$. מהן תוצאות המדידה האפשריות?

ג. מהו ערך הביטויים $\hat{L}_z(\hat{L}_x^2+\hat{L}_y^2)Y_l^m$ ו $\hat{L}^2\hat{L}_z^2Y_l^m$?

ד. חשבו את הזויות האפשריות בין וקטור התנע הזוויתי $\vec{L}$ לבין ציר ה– z, עבור חלקיק המצוי במצב עצמי ל - $\hat{L}^2$ עם ערך עצמי $2\hbar^2$.

(25 נק') **3.** הראו כי פונקציות הגל $Y_1^{-1}(\theta,\phi)=\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{-i\varphi}$ ו $Y_2^0(\theta,\phi)=\sqrt{\frac{5}{16\pi}}\left(3\cos^2\theta-1\right)$ <u>אורתונורמליות</u> (כלומר מנורמלות ואורתוגונליות).

להזכירכם, המכפלה הסקלארית בין פונקציות ספריות הרמוניות מוגדרת כך:

$$\left\langle Y_l^m \middle| Y_{l'}^{m'}\right\rangle=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}Y_l^{m*}(\theta,\varphi)Y_{l'}^{m'}(\theta,\varphi)\sin\theta d\theta d\varphi$$

(25 נק') **4.** נגדיר את "אופרטור ההורדה" כך $L_-=\hbar e^{-i\varphi}(-\frac{d}{d\theta}+i\cot\theta\frac{d}{d\varphi})$

א. מה נקבל אם נפעיל אותו פעם אחת על $Y_1^1(\theta,\phi)=-\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{i\varphi}$. מה יקרה אם נפעיל אותו פעמיים ושלוש פעמים. בטאו את תשובותיכם בעזרת פונקציות ספריות הרמוניות.

ב. על סמך תשובותכם בסעיף א' שערו מה נקבל אם נפעיל את L_- על הפונקציה $Y_3^2(\theta,\phi)$ (תנו תשובה עד כדי קבוע).

אמיר חלבה – אורנשטיין 405, טלפון: 03-6408902.
e-mail: ehaleva@post.tau.ac.il

26/4/2006

כימיה פיזיקלית 2 - תרגיל כיתה מספר 6

1. **תנע זוויתי**

נתון חלקיק הניתן לתיאור על ידי פונקציית הגל הבאה :

$$\psi(x,y,z)=N(x+y+z)e^{-\left[(x^2+y^2+z^2)/\alpha^2\right]}$$

כאשר N מקדם נרמול ו - α פרמטר. מבצעים מדידה של ערכי $\left(\hat{L}_z\right)$ ו - $\hat{L}^2$. מהי ההסתברות שהמדידה תניב את הערכים הבאים :

א. $L^2=2\hbar^2\ ;\ L_z=0$. (1/3)

ב. $L^2=2\hbar^2\ ;\ L_z=\hbar$. (1/3)

ג. $L^2=2\hbar^2\ ;\ L_z=-\hbar$. (1/3)

השתמשו בביטויים עבור הפונקציות הבאות :

$$Y_1^1(\theta,\phi)=\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin(\theta)e^{i\phi}\ ;\ Y_1^{-1}(\theta,\phi)=\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin(\theta)e^{-i\phi}\ ;\ Y_1^0(\theta,\phi)=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos(\theta)$$

2. **תנע זוויתי**

אחת הדרכים להגדיר את הפונקציות הספריות ההרמוניות הנה :

$$Y_l^m(\theta,\phi)=C_l^m P_l^m(\cos\theta)e^{im\phi}$$

כאשר C_l^m הנו קבוע נרמול ו - $P_l^m(x)$ הנן ה – associated Legendre functions המוגדרות על ידי היחס :

$$P_l^m(x)=\left(1-x^2\right)^{|m|/2}\frac{d^{|m|}}{dx^{|m|}}P_l(x)=P_l^{-m}(x)$$

והפונקציות $P_l(x)$ הנן ה – Legendre polynomials המקיימים :

$$P_1(x)=x$$

חשבו את $Y_1^m(\theta,\phi)$ עבור $m=0\ ,\pm1$ מתוך קשרים אלו.

(פתרון : ראה שאלה מספר 1 בתרגיל הכיתה).

אמיר חלבה – אורנשטיין 405, טלפון: 03-6408902.
e-mail: ehaleva@post.tau.ac.il