כימיה פיזיקלית 2 – תרגיל מספר 6

1. תנע זוויתי (33 נק')

א. הוכיחו כי הפונקציות הספריות-הרמוניות $Y_l^m(\theta,\phi)$ עצמיות לאופרטור $\hat{L}_x^2+\hat{L}_y^2$. מהם הערכים העצמיים המתאימים? (רמז: אין צורך להפעיל את $\hat{L}_x^2+\hat{L}_y^2$ על $Y_l^m(\theta,\phi)$ במפורש!)

ב. מודדים את ערכו של רכיב התנע הזוויתי לאורך ציר Z $(\hat{L}_z)$ של חלקיק שפונקציית הגל שלו עצמית לאופרטור $\hat{L}^2$ עם ערך עצמי $12\hbar^2$. מהן תוצאות המדידה האפשריות?

ג. השלימו את המשוואות הבאות: $\hat{L}^2\hat{L}_zY_l^m=?$; $\hat{L}_z^3Y_l^m=?$.

ד. חשבו את הזויות האפשריות בין וקטור התנע הזוויתי $\hat{\vec{L}}$ לבין ציר ה – z, עבור חלקיק המצוי במצב עצמי ל- $\hat{L}^2$ עם ערך עצמי $6\hbar^2$.

2. תנע זוויתי (33 נק')

ניתן לרשום את הפונקציות הספריות הרמוניות $Y_l^m(\theta,\phi)$ ע"י ביטוי מהצורה:

$$Y_l^m(\theta,\phi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}S_{l,m}(\theta)e^{im\phi}$$

כאשר:

$$S_{l,m}(\theta)=\sin^{|m|}(\theta)\sum_{\substack{j=1,3,\dots\\ j=0,2,\dots}}^{l-|m|}a_j\cos^j(\theta)$$

ויחס הרקורסיה בין המקדמים בטור הנו:

$$a_{j+2}=\frac{(j+|m|)(j+|m|+1)-l(l+1)}{(j+1)(j+2)}a_j$$

מצאו את Y_3^0 ואת Y_3^1 מתוך הקשרים הנ"ל (עד כדי נרמול).

3. תנע זוויתי (33 נק')

הראו כי הפונקציה $\psi(\theta,\phi)=\sin(\theta)e^{i\phi}$ עצמית לאופרטורים $(\hat{L}_z)$ ו- $\hat{L}^2$. מהו הערך העצמי המתאים בכל אחד מהמקרים?

עודד הוד – אורנשטיין 206, טלפון: 03-6407229.
e-mail: odedhod@post.tau.ac.il

כימיה פיזיקלית 2 - תרגיל כיתה מספר 6

1. **תנע זוויתי**

נתון חלקיק הניתן לתיאור על ידי פונקציית הגל הבאה :

$$\psi(x,y,z)=N(x+y+z)e^{-\left[(x^2+y^2+z^2)/\alpha^2\right]}$$

כאשר N מקדם נרמול ו - α פרמטר. מבצעים מדידה של ערכי $\left(\hat{L}_z\right)$ ו - $\hat{L}^2$. מהי ההסתברות שהמדידה תניב את הערכים הבאים :

א. $L^2=2\hbar^2\ ;\ L_z=0$. (1/3)

ב. $L^2=2\hbar^2\ ;\ L_z=\hbar$. (1/3)

ג. $L^2=2\hbar^2\ ;\ L_z=-\hbar$. (1/3)

השתמשו בביטויים עבור הפונקציות הבאות :

$$Y_1^1(\theta,\phi)=\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin(\theta)e^{i\phi}\ ;\ Y_1^{-1}(\theta,\phi)=\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin(\theta)e^{-i\phi}\ ;\ Y_1^0(\theta,\phi)=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos(\theta)$$

2. **תנע זוויתי**

אחת הדרכים להגדיר את הפונקציות הספריות ההרמוניות הנה :

$$Y_l^m(\theta,\phi)=C_l^m P_l^m(\cos\theta)e^{im\phi}$$

כאשר C_l^m הנו קבוע נרמול ו - $P_l^m(x)$ הנן ה – associated Legendre functions המוגדרות על ידי היחס :

$$P_l^m(x)=\left(1-x^2\right)^{|m|/2}\frac{d^{|m|}}{dx^{|m|}}P_l(x)=P_l^{-m}(x)$$

והפונקציות $P_l(x)$ הנן ה – Legendre polynomials המקיימים :

$$P_1(x)=x$$

חשבו את $Y_1^m(\theta,\phi)$ עבור $m=0\,,\pm 1$ מתוך קשרים אלו.

(פתרון : ראה שאלה מספר 1 בתרגיל הכיתה).

עודד הוד – אורנשטיין 206, טלפון: 03-6407229.
e-mail: odedhod@post.tau.ac.il