

כימיה פיזיקלית 2 – תרגיל מספר 5

אוסצילטור הרמוני

1. (25 נק') עבור אוסצילטור הרמוני קוונטי, הוכיחו כי פונקציית הגל של מצב הייסוד ופונקציית הגל של המצב המעורר ראשון מקיימות יחסי אורתונורמליות (כלומר הוכיחו כי הן מנורמלות בפני עצמן ואורתוגונליות האחת לרעותה).

2. (25 נק') חשבו את ערכי התצפית $\langle x \rangle$ ו- $\langle x^2 \rangle$ עבור אוסצילטור הרמוני קוונטי במצב $v=1$. מהי סטיית התקן במיקום Δx ?

3. (25 נק') עבור אוסצילטור הרמוני תלת-ממדי האנרגיה הפוטנציאלית ניתנת ע"י הביטוי:
 $V(x, y, z) = \frac{1}{2}k_x x^2 + \frac{1}{2}k_y y^2 + \frac{1}{2}k_z z^2$. כאשר k_x, k_y, k_z הנם קבועי הכוח בשלושת הכיוונים השונים.

א. מהו הביטוי הקוונטי עבור האנרגיה של המערכת ומהי אנרגיית האפס ?
 ב. מהו ביטוי האנרגיה של אוסצילטור הרמוני קוונטי איזוטרופי ($k_x=k_y=k_z$) ? רשמו את האנרגיות והניוון של עשרת המצבים הראשונים.

4. (25 נק') ניתן להגדיר את פולינומי הרמיט באמצעות הפונקציה היוצרת באופן הבא:

$$H_n(z) = (-1)^n e^{z^2} \frac{d^n e^{-z^2}}{dz^n}$$

א. הראו כי: $H_0=1; H_1=2z; H_2=4z^2-2; H_3=8z^3-12z$.
 ב. פולינומי הרמיט מקיימים את יחס הרקורסיה הבא: $zH_n(z) = nH_{n-1}(z) + \frac{1}{2}H_{n+1}(z)$.
 הוכיחו כי יחס זה מתקיים עבור $n=0,1,2$.

ג. ניתן לרשום את פונקציות הגל העצמיות של אוסצילטור הרמוני קוונטי חד-ממדי באופן הבא:
 $\psi_\nu(x) = (2^\nu \nu!)^{-1/2} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\alpha x^2/2} H_\nu(\alpha^{1/2} x)$. רשמו את פונקציות הגל ψ_3 והוכיחו כי היא עצמית להמילטוניאן. מהו הערך העצמי (אנרגיית המצב) ?

כימיה פיזיקלית 2 - תרגיל כיתה מספר 5

1. אפקט המינהור באוסצילטור הרמוני קוונטי

א. הוכיחו כי גבולות התחום המותר קלאסית עבור אוסצילטור הרמוני קוונטי ניתנים ע"י

$$\text{הביטוי: } -\sqrt{(2n+1)} \leq \sqrt{\alpha}x \leq \sqrt{(2n+1)} \text{ , כאשר } \alpha = \left(\frac{2\pi m \omega}{\hbar}\right)$$

ב. חשבו את הסתברות החלקיק להימצא מחוץ לתחום האסור קלאסית עבור הרמות $n = 0, 1$.

$$(0.1116 : n=1 ; 0.1573 : n=0)$$

2. הוכיחו כי פונקציית הגל $\psi_1 = \left(\frac{4\alpha^3}{\pi}\right)^{1/4} x e^{-\alpha x^2/2}$ עצמית להמילטוניאן של אוסצילטור הרמוני קוונטי

חד-ממדי. מהו הערך העצמי (אנרגית המצב) ? $(E_1=1.5\hbar\omega)$