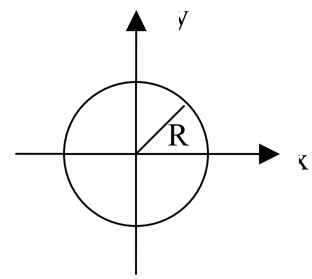
חלקיק בטבעת:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$\Psi(x,y)$$



נעבור לקואורדינטות פולריות במשתנים r,θ:

$$x = r\cos\theta \qquad\qquad y = r\sin\theta$$

במעבר קואורדינטות זה ניתן להעביר גם את ההמילטוניאן למשתנים החדשים:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right) \rightarrow r = const$$

$$I = 2mR^2 \quad\rightarrow\quad \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2mR^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} = -\frac{\hbar^2}{2I}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$$

ומכאן שלמעשה קיבלנו פונקציה התלויה במשתנה אחד בלבד $\Psi(\theta)$. נרשום את משוואת שרדינגר

עבור פונקציית גל זו:

$$-\frac{\hbar^2}{2I}\frac{\partial^2\Psi(\theta)}{\partial\theta^2} = E\Psi(\theta)$$

ונניח פיתרון מהצורה:

$$\Psi(\theta) = Ae^{-i\alpha\theta}$$

נציב את הפתרון שהנחנו במשוואת שרדינגר:

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial\theta^2} = -A\alpha^2 e^{-i\alpha\theta} = -\alpha^2\Psi$$

$$-\frac{\hbar^2}{2I}\left(-\alpha^2\Psi\right) = E\Psi$$

ונקבל:

$$E = \frac{\hbar^2\alpha^2}{2I}$$

את הקבוע a נמצא עפ"י תנאי השפה שהוא התנאי לכך שהפונקציה תהיה מנומסת, כלומר הפונקציה

צריכה להיות חד ערכית:

$$\Psi(\theta) = \Psi(\theta + 2\pi)$$

מכאן נובע:

$$Ae^{i\alpha\theta} = Ae^{i\alpha(\theta+2\pi)} \rightarrow e^{i\alpha\theta} = e^{i\alpha\theta}e^{i\alpha 2\pi} \rightarrow e^{i\alpha 2\pi} = 1 \rightarrow \alpha = m \in \mathrm{N}$$

כלומר האנרגיה יכולה לקבל רק ערכים בדידים:

$$\boxed{E = \frac{\hbar^2 m^2}{2I} = \frac{\hbar^2 m^2}{2MR^2}}$$

את ערכו של המקדם A נמצא מנרמול הפונקציה:

$$\int_0^{2\pi} \Psi^* \Psi d\tau = 1 \;\rightarrow\; \int_0^{2\pi} A e^{-im\theta} A e^{im\theta} d\theta = A^2 \int_0^{2\pi} d\theta = A^2 2\pi = 1$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

מכאן שפונקציית הגל עבור חלקיק בטבעת היא:

$$\boxed{\Psi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\theta} \qquad\qquad m \in \mathrm{N}}$$

נחשב את צפיפות ההסתברות הנתונה ע"י ריבוע פונקציית הגל:

$$P(\theta) = \Psi^*(\theta)\Psi(\theta) = \frac{1}{2\pi} e^{-im\theta} e^{im\theta} = \frac{1}{2\pi}$$

מכאן נובע כי הסיכוי למצוא את החלקיק בכל נקודה ונקודה עבור כל מצב , קבוע. במקרה זה אנרגיית האפס היא 0 כי המספר הקוונטי יכול להיות 0.

רמות האנרגיה באות בזוגות , פרט ל- $m=0$ שם יש רמה אחת. כלומר, הניוון הוא כפול בכל רמה פרט לרמת היסוד.