Richard Dedekind, *Qué son y para qué sirven los números?, y otros escritos sobre los fundamentos de la matemática*, Edición e introducción a cargo de José Ferreirós, Alianza Editorial, Ediciones de la Universidad Autónoma de Madrid, Madrid, 1998. (194 pp.)

Richard Dedekind, *Theory of Algebraic Integers*, Translated and introduced by John Stillwell, Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, Cambridge, 1996. (158 pp.)

Reseñados por Leo Corry, Universidad de Tel Aviv - Llul 22, 1999

Es tal vez difícil evaluar de manera fidedigna el número de estudiosos interesados hoy en día en profundizar sus conocimientos tocantes a los fundamentos de la matemática. Ciertamente hay no pocos de ellos entre los filósofos e historiadores de esta disciplina, y probablemente hay también algunos entre los matemáticos mismos. Lo que puede decirse con mucho mayor seguridad es que el mero hecho de haberse escrito originalmente en alemán o francés gran parte de los textos básicos necesarios para llevar a cabo un estudio de este tipo constituye una de las mayores y más inmediatas limitaciones para muchos de aquellos quienes deseen emprenderlo. Es por tanto muy acertada y afortunada, de a primeras, la decisión de poner al alcance de quienes no pueden leer los textos originales dos traducciones de trabajos absolutamente fundamentales en este campo: los trabajos de Richard Dedekind (1831-1916) sobre los fundamentos de la aritmética y sobre la teoría algebraica de los números.

Dedekind era una persona extremadamente retraída que además pasó la mayor parte de sus años en la alejada ciudad de Braunschweig en el reino de Hannover, donde no tuvo discipulos directos. Su casi compulsiva inclinación a revisar interminablemente sus trabajos antes y después de ser publicados produjo una cantidad relativamente limitada de ellos, que nunca tuvieron grandes repercusiones inmediatas. Sin embargo, al correr de los años sus puntos de vista generales, así como sus más específicas contribuciones, fueron penetrando gradualmente importantes porciones de la actividad matemática hasta llegar a convertirse desde principios de siglo en verdaderos bastiones de la práctica corriente de esta disciplina.

Este interesante desarrollo se explica en parte a través de la intensa correspondencia que Dedekind sostuvo con colegas tales como Georg Cantor, Heinrich Weber, Georg

Frobenius, y Rudolf Lipschitz, colegas que contribuyeron a difundir paulatinamente sus ideas, explícita o implicitamente, en publicaciones y en cursos dictados en diferentes lugares de Alemania. Otro factor sin duda importante fue la adopción por parte de David Hilbert del punto de vista desarrollado por Dedekind en sus trabajos sobre la teoría de los cuerpos de números algebraicos. Hilbert publicó en 1896 un importantísimo trabajo en este campo, el as llamado *Zahlbericht*, marcando la pauta en la investigación de esta disciplina en las décadas venideras bajo la influencia del enfoque de Dedekind. Asimismo Emmy Noether, al sentar las bases del álgebra estructural moderna que vendría a dominar desde los años treinta de este siglo, se inspiró profundamente en la obra de Dedekind.

No debe sorprendernos, entonces, que la obra de Dedekind haya sido objeto de un detenido estudio en el marco de diversos trabajos sobre la historia de las matemáticas modernas publicados en la última década. Los detalles técnicos de sus trabajos han sido analizados por distintos expertos en la teoría de los conjuntos y de los números, así como por historiadores y filósofos. Igualmente, muchos trabajos que han descrito el desarrollo institucional e intelectual de las matemáticas a fines de siglo en Alemania no han dejado de discutir el importante papel jugado por Dedekind en este desarrollo.

Las dos publicaciones que reseñamos aquí vienen a constituír un necesario y elegante complemento a ese corpus de conocimiento que se ha desarrollado en torno a Dedekind, sus trabajos y su época. Ellas proporcionan, como ya se dijo, acceso a los textos originales concernientes a dos campos de trabajo fundamentales en su obra y que además están estrechamente relacionados entre s.

"*Qué son y para qué sirven los números?*" es el título de un breve libro publicado por primera vez en 1888, en el cual Dedekind expuso un desarrollo sistemático del sistema de números naturales y de sus propiedades aritméticas básicas, basándose en la idea de conjunto. El título alemán original, dicho sea de paso, *"Was sind und was sollen die Zahlen?*", no admite una traducción directa al castellano ni al inglés, y la que José Ferreirós nos porpone aquí parece muy adecuada y sugestiva. Bajo este título Ferreirós ha traducido y reunido en esta compilación, además, algunos textos adicionales de Dedekind que nos dan una idea muy clara de su concepción general de los fundamentos de la aritmética y de la manera en que la idea de conjunto puede usarse como elemento básico de estos fundamentos.

La colección se inicia con una introducción escrita por Ferreirós mismo, en la que se describe el contexto científico-histórico de la obra de Dedekind. Esta introducción es clara e instructiva y cumple muy acertadamente su cometido. Al escribirla, Ferreirós se basó en la literatura secundaria existente, a la cual él mismo ha contribuído con varios trabajos. Después de finalizar esta introducción, el lector puede acometer con mucha mayor seguridad la lectura de los textos subsiguientes.

El primer texto de Dedekind que encontramos aquí es "Continuidad y números irracionales", publicado originalmente en 1872. Es en este texto que Dedekind introdujo su celebrado concepto de "cortadura", destinado a construir los números irracionales a partir de los racionales, y basándose en la posibilidad de formar conjuntos arbitrarios de éstos últimos. Al haber empezado su labor docente en Göttingen en 1854, el quisquilloso Dedekind notó con desagrado que los textos existentes no proporcionaban una fundamentación "adecuada" del cálculo infinitesimal. En su opinión -- y en esto difería de sus colegas -- la única fundamentación que ofrecían los textos existentes se basaba en una analogía geométrica que en su opinión era inaceptable. Dedekind usósu concepto de cortadura para demostrar, básandose tan sólo en las propiedades aritméticas de los reales que pueden deducirse de este concepto, un teorema del cual pueden ya derivarse todos los resultados fundamentales del cálculo. Este teorema establece que toda sucesión acotada y monótona de números reales admite un límite real, y Dedekind efectivamente lo demuestra al final del texto. Es interesante que en el mismo año de 1872, Cantor, Heine y Méray publicaron sendos artículos en los cuales abordaban el mismo problema de definir los números reales, cada cual básandose en enfoques diferentes al de Dedekind. La importancia histórica de "Continuidad y números irracionales" es evidente tanto por separado, como por su relación con otros textos de Dedekind y los de sus colegas.

Luego del tratamiento de los irracionales, encotramos el famoso texto que le da nombre a la colección: "Qué son y para qué sirven los números?". Es sabido que Dedekind fue concibiendo y desarrollando simultaneamente muchas de sus más importantes ideas matemáticas, y en particular las de sus dos textos sobre los números irracionales y los naturales. Si en áuel trabajo se basó en la definición de "cortadura", en éste desarrolló su nueva teoría con ayuda de otro nuevo concepto, "cadena". Si bien una cadena no se asemeja directamente a una cortadura, una perspectiva similar subyace la definición de ambos conceptos, al basarse en el supuesto de que podemos consturir conjuntos arbitrarios. De hecho, Dedekind fue muchos más lejos en su enfoque conjuntista aquí que en cualquier otro de sus trabajos, incluyendo muchos detalles que desde el punto de vista de la teoría moderna se consideran debilmente justificados. Sea como sea, Dedekind se concentra aquí (como lo hizo con los irracionales) en la fundamentación de un resultado básico para el sistema que esta tratando. Se trata esta vez de fundamentar el principio de inducción completa, que en su opinión da la clave para el desarrollo todo de la aritmética de los números naturales.

Además de estos dos textos centrales, incluye esta colección la traducción de cuatro manuscritos inéditos y de fragmentos tomados de la correspondencia de Dedekind con Lipschitz, Weber y Keferstein. Parte de estos textos aparecen publicados aquí por primera vez, mientras que otros ya habían aparecido en diferentes lugares. Ellos constituyen un interesante complemento a los textos básicos de Dedekind y contribuyen efectivamente a consolidar una impresión amplia y coherente de las ideas de este matemático en lo concerninete al uso de la incipiente idea de conjunto como posible fundamenatción de los diferentes sistemas numéricos.

"Theory of Algebraic Integers" es la traducción de un texto publicado en francés por Dedekind en 1877, por invitación de el *Bulletin des sciences mathématiques*. Ya en 1871 Dedekind había publicado la primera versión de su teoría de ideales en el marco de un suplemento al famoso texto de Dirichlet sobre la teoría de los números (que Dedekind editó). Su versión francesa contiene algunos cambios importantes sobre la anterior, y tal como Dedekind acostumbraba, modificaciones adicionales aparecerían en las versiones futuras de la teoría. Así pues, la escogencia del texto francés como base para presentar sus ideas en este campo es tan sólo una de las posibilidades existentes y es tal vez dabatible si es ella la más apropiada o la más represntativa (si es que alguna de las versiones lo es). En todo caso, para el traductor ésta ha sido "la versión más accesible", que además tiene la ventaja de ser una de las más didacticamente claras de entre las varias versiones de la teoría de los ideales de Dedekind.

La teoría de los ideales de Dedekind es un intento de generalizar la teoría de los números primos ideales introducida por Eduard Ernst Kummer en 1844. Esta última fue desarrollada para estudiar el fenómeno de factorización única en dominios de números del tipo $a+\theta b$, donde θ es complejo y a,b son enteros. El caso θ = _-1 había sido estudiado minuciosamente por Gauss en su famoso *Disquisitiones Mathematicae* (1801), habiendo mostrado que en este dominio se reproducen todas las propiedades básicas de la aritmética de los enteros, incluyendo el teorema de factorización única en factores primos. La teoría de Kummer proporcionó interesantes resultados, pero resultó ser un tanto limitada en lo que respecta al tipo de dominios en los cuales podía ser utilizada. Una generalización apropiada de ella aparecía como un desideratum natural y dos grandes matemáticos alemanes decidieron abordarla simultaneamente: Dedekind y Leopold Kronecker. Cada uno de ellos conocía en detalle y respetaba enormemente la contribución de su colega mientras se iba produciendo, pero también cada uno adoptóun punto de vista radicalmente opuesto al otro. El punto de vista de Dedekind suele calificarse de mucho más "conceptual", mientras que el de Kronecker se ha visto tradicionalmente como más "algorítmico". A la larga, y en parte por mediación del influyente Hilbert, el enfoque de Dedekind llegó a prevalecer a partir de principios del siglo veinte, lo cual, por supuesto, no desmerece de los importantes esfuerzos de Kronecker.

El concepto de ideal fue introducido por Dedekind con el fin de estudiar sistemáticamente la cuestión más básica que en su opinión ofrecia un fundamento general para la teoría de los enteros algebraicos: el teorema de factorización única. En este sentido, el paralelo con los dos trabajos de Dedekind que aparecen en la recopilación de Ferreirós es inmediato. Pero este paralelo es en realidad mucho más profundo, ya que el concepto de ideal de Dedekind, al igual que las cortaduras y las cadenas, se basa en la consideración de ciertos conjuntos de números que satisfacen determinadas propiedades. Esta caraterística no es debidamente resaltada por el editor en la versión que aquí nos ocupa, en la introducción que precede a su traducción del texto de Dedekind (introducción que fuera de eso es muy completa e informativa), pero el lector podrá notarla por sí mismo, especialmente si lee este texto junto con los anteriormente mencionados.

John Stillwell nos presenta aquí una introducción histórica en la que explica, además de los resultados de Gauss y de Kummer sobre factorización única, la conección de éstos con el teorema de Fermat, que de nuevo ha vuelto a llamar la atención en los últimos años. La traducción del francés es clara y acertada, y no agrega dificultades que no aparezcan ya en el texto de original de Dedekind. Cualquier lector con una preparación matemática básica, y preferiblemente con algún conocimiento de álgebra moderna o teoría de los números, puede abordar este texto (aunque no sin esforzarse en los detalles). La claridad y sistematicidad de Dedekind lo llevará adelante, resultado tras resultado, y el espíritu moderno en que está imbuída la obra toda no le recordará que se trata de un trabajo escrito muchísimo antes de que el enfoque conjuntista y estructural se adoptara abiertamente en la matemática del siglo veinte.

Así pues, nos encontramos frente a dos libros de gran importancia histórica y de gran relevancia para todo el que se interese en temas relacionados con los fundamentos de la matemática. Vale señalar que ultimamente se han publicado otras colecciones de textos relacionados con el mismo campo, y en futuras ocasiones los reseñaremos también aquí