Conjugate Calculus Rules

$g(\mathbf{x})$	$g^*(\mathbf{y})$
$\sum_{i=1}^m f_i(\mathbf{x}_i)$	$\sum_{i=1}^m f_i^*(\mathbf{y}_i)$
$\alpha f(\mathbf{x})$ $(\alpha > 0)$	$\alpha f^*(\mathbf{y}/\alpha)$
$\alpha f(\mathbf{x}/\alpha)$ $(\alpha > 0)$	$\alpha f^*(\mathbf{y})$
$f(\mathcal{A}(\mathbf{x}-\mathbf{a})) + \langle \mathbf{b}, \mathbf{x}\rangle + c$	$f^*\left((\mathcal{A}^T)^{-1}(\mathbf{y}-\mathbf{b})\right) + \langle \mathbf{a}, \mathbf{y}\rangle - c - \langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle$

Conjugate Functions

f	$\text{dom}(f)$	f^*	assumptions
e^x	$\mathbb{R}$	$y\log y - y$ $(\text{dom}(f^*) = \mathbb{R}_+)$	
$-\log x$	$\mathbb{R}_{++}$	$-1 - \log(-y)$ $(\text{dom}(f^*) = \mathbb{R}_{--})$	
$\max\{1-x, 0\}$	$\mathbb{R}$	$y + \delta_{[-1,0]}(y)$	
$\frac{1}{p}\|x\|^p$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{q}\|y\|^q$	$p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$
$-\frac{x^p}{p}$	$\mathbb{R}_+$	$-\frac{(-y)^q}{q}$ $(\text{dom}(f^*) = \mathbb{R}_{--})$	$0 < p < 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$
$\frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^T\mathbf{x} + c$	$\mathbb{R}^n$	$\frac{1}{2}(\mathbf{y}-\mathbf{b})^T\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{y}-\mathbf{b}) - c$	$\mathbf{A} \in \mathbb{S}^n_{++}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^T\mathbf{x} + c$	$\mathbb{R}^n$	$\frac{1}{2}(\mathbf{y}-\mathbf{b})^T\mathbf{A}^\dagger(\mathbf{y}-\mathbf{b}) - c$ $(\text{dom}(f^*) = \mathbf{b} + \text{Range}(\mathbf{A}))$	$\mathbf{A} \in \mathbb{S}^n_{+}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}$
$\sum_{i=1}^n x_i \log x_i$	$\mathbb{R}^n_+$	$\sum_{i=1}^n e^{y_i - 1}$	
$\sum_{i=1}^n x_i \log x_i$	Δ_n	$\log\left(\sum_{i=1}^n e^{y_i}\right)$	
$-\sum_{i=1}^n \log x_i$	$\mathbb{R}^n_{++}$	$-n - \sum_{i=1}^n \log(-y_i)$	
$\log\left(\sum_{i=1}^n e^{x_i}\right)$	$\mathbb{R}^n$	$\sum_{i=1}^n y_i \log y_i$ $(\text{dom}(f^*) = \Delta_n)$	
$\max_i\{x_i\}$	$\mathbb{R}^n$	$\delta_{\Delta_n}(\mathbf{y})$	
$\delta_C(\mathbf{x})$	C	$\sigma_C(\mathbf{y})$	$C \subseteq \mathbb{E}$
$\sigma_C(\mathbf{x})$	$\mathbb{E}$	$\delta_{\text{cl}(\text{conv}(C))}(\mathbf{y})$	$C \subseteq \mathbb{E}$
$\\|\mathbf{x}\\|$	$\mathbb{E}$	$\delta_{B_{\\|\cdot\\|_*}[\mathbf{0},1]}(\mathbf{y})$	
$-\sqrt{\alpha^2 - \\|\mathbf{x}\\|^2}$	$B[\mathbf{0}, \alpha]$	$\alpha\sqrt{\\|\mathbf{y}\\|_*^2 + 1}$	$\alpha > 0$
$\sqrt{\alpha^2 + \\|\mathbf{x}\\|^2}$	$\mathbb{E}$	$-\alpha\sqrt{1 - \\|\mathbf{y}\\|_*^2}$ $(\text{dom } f^* = B_{\\|\cdot\\|_*}[\mathbf{0}, 1])$	$\alpha > 0$
$\frac{1}{2}\\|\mathbf{x}\\|^2$	$\mathbb{E}$	$\frac{1}{2}\\|\mathbf{y}\\|_*^2$	
$\frac{1}{2}\\|\mathbf{x}\\|^2 + \delta_C(\mathbf{x})$	C	$\frac{1}{2}\\|\mathbf{y}\\|^2 - \frac{1}{2}d_C^2(\mathbf{y})$	$\emptyset \neq C \subseteq \mathbb{E}$, $\mathbb{E}$ Euclidean
$\frac{1}{2}\\|\mathbf{x}\\|^2 - \frac{1}{2}d_C^2(\mathbf{x})$	$\mathbb{E}$	$\frac{1}{2}\\|\mathbf{y}\\|^2 + \delta_C(\mathbf{y})$	$\emptyset \neq C \subseteq \mathbb{E}$ closed convex

Conjugates of Symmetric Spectral Functions over $\mathbb{S}^n$

$g(\mathbf{X})$	$\mathrm{dom}(g)$	$g^*(\mathbf{Y})$	$\mathrm{dom}(g^*)$
$\lambda_{\max}(\mathbf{X})$	$\mathbb{S}^n$	$\delta_{\Upsilon_n}(\mathbf{Y})$	Υ_n
$\alpha\|\mathbf{X}\|_F \ (\alpha > 0)$	$\mathbb{S}^n$	$\delta_{B_{\|\cdot\|_F}[\mathbf{0},\alpha]}(\mathbf{Y})$	$B_{\|\cdot\|_F}[\mathbf{0},\alpha]$
$\alpha\|\mathbf{X}\|_F^2 \ (\alpha > 0)$	$\mathbb{S}^n$	$\frac{1}{4\alpha}\|\mathbf{Y}\|_F^2$	$\mathbb{S}^n$
$\alpha\|\mathbf{X}\|_{2,2} \ (\alpha > 0)$	$\mathbb{S}^n$	$\delta_{B_{\|\cdot\|_{S_1}}[\mathbf{0},\alpha]}(\mathbf{Y})$	$B_{\|\cdot\|_{S_1}}[\mathbf{0},\alpha]$
$\alpha\|\mathbf{X}\|_{S_1} \ (\alpha > 0)$	$\mathbb{S}^n$	$\delta_{B_{\|\cdot\|_{2,2}}[\mathbf{0},\alpha]}(\mathbf{Y})$	$B_{\|\cdot\|_{2,2}}[\mathbf{0},\alpha]$
$-\log\det(\mathbf{X})$	$\mathbb{S}^n_{++}$	$-n - \log\det(-\mathbf{Y})$	$\mathbb{S}^n_{--}$
$\sum_{i=1}^n \lambda_i(\mathbf{X})\log(\lambda_i(\mathbf{X}))$	$\mathbb{S}^n_+$	$\sum_{i=1}^n e^{\lambda_i(\mathbf{Y})-1}$	$\mathbb{S}^n$
$\sum_{i=1}^n \lambda_i(\mathbf{X})\log(\lambda_i(\mathbf{X}))$	Υ_n	$\log\left(\sum_{i=1}^n e^{\lambda_i(\mathbf{Y})}\right)$	$\mathbb{S}^n$

Conjugates of Symmetric Spectral Functions over $\mathbb{R}^{m\times n}$

$g(\mathbf{X})$	$\mathrm{dom}(g)$	$g^*(\mathbf{Y})$	$\mathrm{dom}(g^*)$
$\alpha\sigma_1(\mathbf{X}) \ (\alpha > 0)$	$\mathbb{R}^{m\times n}$	$\delta_{B_{\|\cdot\|_{S_1}}[\mathbf{0},\alpha]}(\mathbf{Y})$	$B_{\|\cdot\|_{S_1}}[\mathbf{0},\alpha]$
$\alpha\|\mathbf{X}\|_F \ (\alpha > 0)$	$\mathbb{R}^{m\times n}$	$\delta_{B_{\|\cdot\|_F}[\mathbf{0},\alpha]}(\mathbf{Y})$	$B_{\|\cdot\|_F}[\mathbf{0},\alpha]$
$\alpha\|\mathbf{X}\|_F^2 \ (\alpha > 0)$	$\mathbb{R}^{m\times n}$	$\frac{1}{4\alpha}\|\mathbf{Y}\|_F^2$	$\mathbb{R}^{m\times n}$
$\alpha\|\mathbf{X}\|_{S_1} \ (\alpha > 0)$	$\mathbb{R}^{m\times n}$	$\delta_{B_{\|\cdot\|_{S_\infty}}[\mathbf{0},\alpha]}(\mathbf{Y})$	$B_{\|\cdot\|_{S_\infty}}[\mathbf{0},\alpha]$