מבוא לתולדות המתמטיקה
5. מתמטיקה והאימפריה הרומית

332 לפנה"ס : ייסוד אלכסנדריה
323 לפנה"ס : מותו של אלכסנדר
@300 לפנה"ס : האלמנטים של אאוקליד
264 לפנה"ס : המלחמה הפונית הראשונה - תחילת ההתפשטות הרומית
146 לפנה"ס : נפילת קארטגו וקורינטו - תחילת ההגמוניה הרומית
116 ל "ס : טראיאנוס מגדיל את גבולות האימפריה
286 ל"ס : דיאוקלציאנוס מחלק את האימפריה
324 ל"ס : ייסוד קונטנטינופל

Roger Cooke - *The History of Mathematics*:

The political fragmentation of the Mediterranean world under the successors of Alexander had led to a long period of unrest, with continual small wars being waged. The Roman expansion brought stability, which facilitated further expansion. The mainland of Greece was incorporated into the Roman Empire in the two generations following the Third Punic War [150-146 BCE]. Egypt became a Roman province under Julius Caesar [101-44 BCE] in the time of Cleopatra, the last ruling descendant of Alexander's general Ptolemy.

Under Caesar Augustus [63 BCE-14 AD] with the Pax Romana firmly established in the entire mathematical world, one would expect conditions to be ideal for the peaceful intellectual activities such as mathematics. The fact is, however, that the mathematics produced under the Roman Empire was much less original and profound than that which had been produced during the earlier periods of political chaos. The scholars at Alexandria and Athens, for some reason, stopped advancing knowledge with original research and spent their time commenting and elaborating the work of the great mathematicians of the past. The reason for this decline are a subject of speculation. Nevertheless, the four centuries from the time of Augustus to the sack of Rome [455 AD] were not entirely barren.

323לפנה"ס : מותו של אלכסנדר
@ 300לפנה"ס : האלמנטים של אאוקליד
264לפנה"ס : המלחמה הפונית הראשונה - תחילת ההתפשטות הרומית
31לפנה"ס : אאוגוסטוס עולה לשלטון
@ 75ל"ס : הירון מאלכסדנריה
116ל"ס : טראיאנוס מגדיל את גבולות האימפריה
@ 150ל"ס : תלמי - האלמגסט
@ 250ל"ס : דיאופנטוס - אריתמטיקה
286ל"ס : דיאוקלציאנוס מחלק את האימפריה
@ 320ל"ס : פאפוס - Synagoge
324ל"ס : ייסוד קונטנטינופל
415ל"ס : מותה של היפתיה
455ל"ס : בזיזת רומי

Willbur Knorr - *Ancient Tradition of Geometric Problems*:

The decreased attention to advanced geometry beginning in the 2nd century BC should not be taken as a decline of the mathematical field in general, but rather a shift of interest from the special field of problem solving towards others, especially spherics, trigonometry, and numerical methods, which bore directly on the development of geometric and computational astronomy. Such shifts in the fashion of research, as it were, are a recurrent phenomenon in the history of science and mathematics, and indeed, changes of this sort had happened at least twice before within the ancient geometry. The study of irrational lines, for instance, was a prominent concern among geometers in the pre-Euclidean period; it engaged the efforts of superior geometers like Theaetetus and Eudoxus, while the formal synthesis of the classification of the irrationals constitutes the largest and most tightly structured part of the Euclid's *Elements.*

Yet we learn of no work in this field among later geometers beyond a study of "unordered irrationals" by Apollonius and a scattering of isolated results in Pappus which lie entirely within the Euclidean framework. Similarly, Eudoxus' limiting methods were the chief inspiration for the work of Archimedes and of necessity remain an element in the study of the circle quadrature and related problems of curvilinear measurement. Nevertheless, their significance to geometers other than Archimedes was minimal, as one appreciates most strikingly in their utter absence from the works of Apollonius. Doubtless, in the cases of both the study of irrationals and of the application of the Eudoxean techniques, the prospects of new and interesting discoveries was discouraging, so that later geometers largely abandoned their study for other fields. In much the same way, the field of analysis must have made the impression of having reached saturation through the accomplishments of Apollonius and his colleagues.

Thus, the later writers on geometry are not likely to be of great interest in connection with the development of technical methods or the discovery of new results. They are extremely important, however, with respect to the issue of the textual transmission of these technical materials. The editorial tradition of collecting and commenting on interesting results extends at least as far back as Hero, Geminus and Menelaus in the 1st century AD and continues almost without interruption through late antiquity into the circle of Arabic scholars in the 9th and 10th century. Theon and Eutocius contributed critically to the preparation of editions of the work of Euclid, Archimedes and Apollonius. It is through this commentators that we receive the overwhelming majority of our data relating to the ancient geometry. …

A third aspect of potential interest in these later writing lies in their efforts to evaluate the geometric achievement of their own and earlier times.

הירון מאלכסנדריה (@10-75 לי"ס)

Pappus *Mathematical Collection* VIII:

The mechanicians of Heron's school say that mechanics can be divided into a theoretical and a manual part; the theoretical part is composed of geometry, arithmetic, astronomy and physics, the manual of work in metals, architecture, carpentering and painting and anything involving skill with the hands.

... the ancients also describe as mechanicians the wonder-workers, of whom some work by means of pneumatics, as Heron in his Pneumatica, some by using strings and ropes, thinking to imitate the movements of living things, as Heron in his Automata and Balancings, ... or by using water to tell the time, as Heron in his Hydria, which appears to have affinities with the science of sundials.

On the dioptra : מכשירים למדידת שטחים (תיאורולית) – שיטה למדוד את המרחק בין אלכסנדריה ורומי דרך הפרשי זמנים מקומיים בעת ליקוי ירח

Pneumatica – תיאור מכשירים מכניים על בסיס אוויר, קיטור או לחץ מים

The automaton theatre - מתאר תיאטרון בובות שעובד עם חוטים ומשקלים

Belopoeica - על בניית כלי מלחמה

Catoprica - על מראות. מבוסס על תורת ראיה שעל פיה העין היא מקור לקרני ראייה שמושלכות אל האובייקטים, ומתפשטות במהירות אינסופית

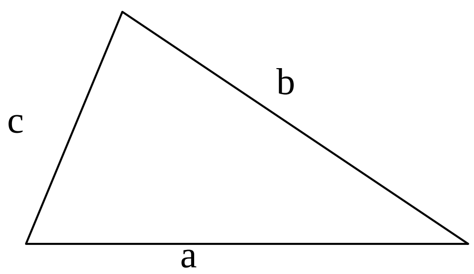
Mechanica – התייחסות לאמנויות הבניה : איזון בין גופים, סטטיקה, הרמת גופים כבדים בעזרת מנופים, גלגלות, מזחלות, ברגי ארכימדס

Metrica - שיטות מדידה לשטחים, נפחים, שטח פנים של גופים שונים ועוד שיטה לקירוב שורש ריבועי (ידועה לבבליים?!)

Since 720 has not its side rational, we can obtain its side within a very small difference as follows. Since the next succeeding square number is 729, which has 27 for its side, divide 720 by 27. This gives 26 2/3. Add 27 to this, making 53 2/3, and take half this or 26 5/6. The side of 720 will therefore be very nearly 26 5/6. In fact, if we multiply 26 5/6 by itself, the product is 720 1/36, so the difference in the square is 1/36. If we desire to make the difference smaller still than 1/36, we shall take 720 1/36 instead of 729 (or rather we should take 26 5/6 instead of 27), and by proceeding in the same way we shall find the resulting difference much less than 1/36.

Metrica I נוסחת הירון לשטח המשולש :

אם S= 1/2(a+b+c)



$$A=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

מקור הנוסחה: ארכימדס??

A מייצג מכפלה של 4 אורכים: ייצור לגמרי א-גיאומטרי

תלמי (Claudius Ptolomeus) (85-165 ל"ס)

אלמגסט - Syntaxis Mathematical (Collection)

13ספרים - טריגונומטריה ואסטרונומיה

Gerd Grasshoff:

Ptolemy's Almagest shares with Euclid's Elements the glory of being the scientific text longest in use. From its conception in the second century up to the late Renaissance, this work determined astronomy as a science. During this time the Almagest was not only a work on astronomy; the subject was defined as what is described in the Almagest.

Almagest:

We shall try to note down everything which we think we have discovered up to the present time; we shall do this as concisely as possible and in a manner which can be followed by those who have already made some progress in the field. For the sake of completeness in our treatment we shall set out everything useful for the theory of the heavens in the proper order, but to avoid undue length we shall merely recount what has been adequately established by the ancients. However, those topics which have not been dealt with by our predecessors at all, or not as usefully as they might have been, will be discussed at length to the best of our ability.

…

[After introducing the mathematical concepts] we have to go through the motions of the sun and of the moon, and the phenomena accompanying these motions; for it would be impossible to examine the theory of the stars thoroughly without first having a grasp of these matters. Our final task in this way of approach is the theory of the stars. Here too it would be appropriate to deal first with the sphere of the so-called 'fixed stars', and follow that by treating the five 'planets', as they are called.

דיאופנטוס מאלכסנדריה (@250 לי"ס)

פרטים ביוגרפים - כלום לא ידוע מלבד חידה:

Greek Anthology, Metrodorus, @500 AD:

... his boyhood lasted 1/6th of his life; he married after 1/7th more; his beard grew after 1/12th more, and his son was born 5 years later; the son lived to half his father's age, and the father died 4 years after the son.

נישא בגיל 26, בנו מת בגיל 42, ארבע שנים לפני מותו של דיאופנטוס עצמו בגיל 84

"האריתמטיקה"

13 ספרים

6 הראשונים השתמרו ביוונית

עוד 4 בערבית

כתב היד המוקדם ביותר שנשמר: מאה 13, ביזנטיון

דוגמה (I.28): שני מספרים שסכומם הוא 20 וסכום הריבועים שלהם שווה 208

$(10+x)^2 + (10-x)^2 = 208$; $x=2$ ולכן המספרים הם 8, 12

דוגמה (II.20): שני מספרים, כך שהסכום של כל אחד מהם והרבוע של השני הוא תמיד מספר ריבועי

דיאופנטוס בוחר שני מספרים x ו-$2x+1$ - כך: "הריבוע של הראשון יחד עם השני": x^2+2x+1 - יהיה תמיד מספר ריבועי. אבל נדרש שגם: "הריבוע של השני יחד עם הראשון" $(2x+1)^2 + x$ -יהיה תמיד מספר ריבועי.

פשוט בוחרים מקרה פרטי אחד של ריבוע: $(2x-2)^2 = (2x+1)^2 + x$

שמוביל למשוואה: $13x = 3$

ולפתרון: $x=3/13$ ומכאן $2x+1 = 19/13$

"עקרונות" לפתרון:

- נעלם אחד בלבד
- פתרון אחד בלבד – לא מקרים רבים ולא כל המקרים
- יכולנו להשוות גם ל- $(2x-3)^2$ או ל- $(2x-4)^2$
- כאשר שני מספרים צריכים לקיים שני תנאים שונים, בוחרים את המספרים כך שיקיימו את התנאי הראשון, ואז פותרים את הבעיה של קיום התנאי השני

דיאופנטוס והאלגברה - נקודות דמיון

1. שימוש בסמלים:

M $\mu o \nu \alpha \sigma$ – יחידה

ζ נעלם

Δ^{Y} $\delta \upsilon \nu \alpha \mu \iota \sigma$ – נעלם בריבוע

K^{Y} $\kappa \upsilon \beta o \sigma$ – נעלם בשלישית

חזקות אחרות: $\Delta^{Y}\Delta$ - ברביעית; ΔK^{Y} – בחמישית; $K^{Y}K$ – בשישית;

$$2x^4 - x^3 - 3x^2 + 4x + 2$$

$$\Delta^{Y}\Delta\overline{\beta}\,\zeta\,\overline{\beta}\dot{M}\overline{\delta} \;\pitchfork\; K^{Y}\overline{\alpha}\,\Delta^{Y}\overline{\gamma}$$

2. התמקדות במשוואות וניסוח כללי מניפולציה

דוגמה: "אם בפתרון של בעייה מסויימת מין אחד הופך להיות שווה לאותו מין, אבל לא באותה כמות, אזי חייבים לחסר שווה מכל אחד מהצדדים עד שהמין משתווה למינו"

$$\varsigma\overline{\eta}\dot{M}\overline{\delta}\ \iota\sigma.\ \Delta^{Y}$$

8x+4 שייך למין הריבועים

3. נושא החקירה

- מציאת מספרים המקיימים תנאים נתונים מראש
- התנאי כולל בדרך כלל פעולה בין המספרים (מתוארת במילים!)
- לאחר שהתנאי מתורגם ל"משוואה", פועלים עליה

4. אופי אלגוריתמי ????

דיאופנטוס והאלגברה - נקודות שוני

1. שימוש בסמלים ... אבל באופן מוגבל:

סמלים כ"קיצורים", ולא כ"מסמלים". הן הניסוח והן הפתרונות נותנים באופן מילולי, לא ע"י שימוש בסמלים

2. שימוש בסמלים ... אבל באופן מוגבל:

* אין מקבילה ל"משוואה הכללית" ax^2+bx+c

* אין יותר מאשר נעלם אחד

3. התמקדות במשוואות וניסוח כללי מניפולציה ... אבל המשוואה היא כלי לפתרון **בעיות!** בעיות הן מוקד העניין

* דיאופנטוס ממיין בעיות לפי סוגים, אבל אף פעם לא ממיין משוואות לפי סוגים

4. התמקדות במשוואות וניסוח כללי מניפולציה ... אבל אין נסיון לחפש את **כל** הפתרונות!

לעיתים דיאופנטוס מחפש מספר המקיים תנאי כלשהו

דוגמה: II.11 "להוסיף מספר לשני מספרים נתונים כך ששניהם ייהפכו לריבועים" - זאת לא משוואה!

5. התמקדות במשוואות וניסוח כללי מניפולציה ... אבל הפתרונות תמיד יהיו מספרים רציונליים חיוביים!

* מוסיפים תנאי לחלק מהבעיות (diorismos) כדי לאפשר פרתונות כאלה

בעיה: II.30 "למצוא שני מספרים בהינתן מכפלתם וההפרש בינהם".
תנאי: (מכפלה+הפרש)*4 חייב להיות בעל שורש שלם
דוגמה של דיאופנטוס: מכפלה = 96, הפרש = 4

6. אופי אלגוריתמי ... אבל יש אלגוריתם לכל מקרה בנפרד! פתרונות AD-HOC!

דוגמאות לבעיות שדיאופנטוס פותר

I.15 - למצוא שני מספרים שמקיימים יחסים מוגדרים מראש, לאחר שכל אחד מהם קיבל סכום מסויים מן השני

$$(x+a)/(y-a)=r; \quad (y+b)/(x+b)=s$$

פתרון: ניקח $a=30; \ r=2; \ b=50; \ s=3$. נניח $x=2\zeta-30; \ y=\zeta+30$

התנאי הראשון מתקיים מיד; התנאי השני גורר:

$$\zeta+80= 3(2\zeta-80) \implies \zeta=64.$$

המספרים הם: 98, ו-94

II.8- לחלק מספר ריבועי נתון לשני מספרים ריבועיים

נדרש לחלק את המספר 16 לשני ריבועים. הריבוע הראשון הוא x^2 והשני הוא $16-x^2$
אני לוקח את הריבוע מהצורה $(mx-4)^2$ כשאר m הוא מספר שלם כלשהו ו-4 הוא השורש של 16. ניקח למשל $2x-4$ להיות הצד, ואז הריבוע עצמו הוא $4x^2+16-16x$. אז $4x^2+16-16x = 16-x^2$ הוסף את הגורם השלילי לשני הצדדים והחסר שווים משווים. מקבלים $5x^2=16x$ ומכאן $x=16/5$.

אחד המספרים הוא, אם כן, 256/25, השני הוא 144/25 והסכום הוא 400/25, או 16ת וכל המספרים הם ריבועיים.

פייר דה פרמה (1601-1625) כתב בשולי העותק שלו:

"מצד שני בלתי אפשרי לחלק מספר בשלישית לשני מספרים בשלישית או מספר ברביעית (biquadrate) לשני מספרים ברביעית, או באופן כללי כל חזקה, חוץ משניים, לשתי חזקות בעלות אותו מאריך.

גיליתי הוכחה מש נפלאה לכך, אלא שהשוליים אינם גדולים דיים כדי להכיל."

III.19 - למצוא ארבעה מספרים כך שאם מוסיפים או מחסרים אחד מהם לריבוע של סכום המספרים, מתקבל מספר ריבועי

תשובה אחת אפשרית:

17163600/163021824; 12675000/163021824

15615600/163021824; 8516600.163021824

פאפוס מאלכסנדריה (@290-350 ל"ס)

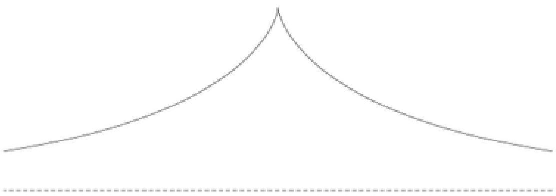
The Mathematical Collection - *Synagoge*

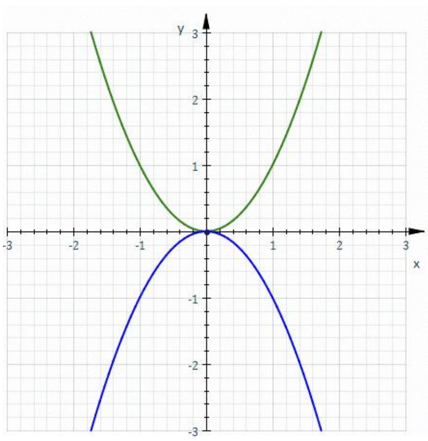
ספר III - הבעיות הקלאסיות של הגיאומטריה וסיווגן

The ancients say there are three types of problem in geometry, the so-called 'plane', 'solid', and 'linear' problems. Those that can be solved with straight line and circle are properly called 'plane' problems, for the lines by which such problems are solved have their origin in a plane.

Those problems that are solved by the use of one or more sections of the cone are called 'solid' problems. For it is necessary in the construction to use surfaces of solid figures, that is to say, cones. There remain the third type, the so-called 'linear' problem. For the construction in these cases curves other than those already mentioned are required, curves having a more varied and forced origin and arising from more irregular surfaces and from complex motions. Of this character are the curves discovered in the so-called 'surface loci' and numerous others even more involved ... . These curves have many wonderful properties. More recent writers have indeed considered some of them worthy of more extended treatment, and one of the curves is called 'the paradoxical curve' by Menelaus. Other curves of the same type are spirals, quadratrices, conchoids, and cissoids.

הציסואיד (cissoid) - דיאוקלס (Diocles) - 180-240 לפנה"ס



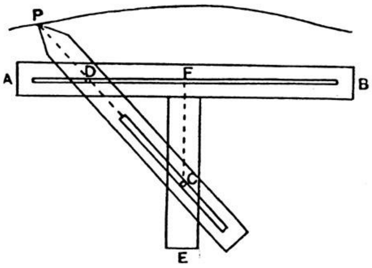


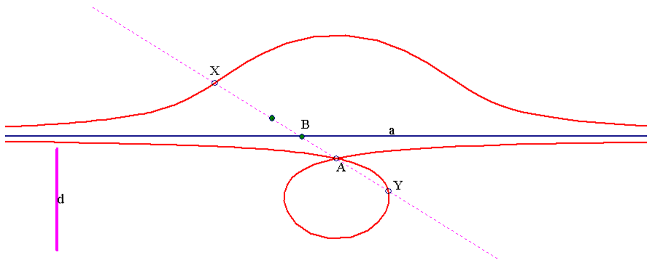
הקונקואיד (conchoids) - ניקומדס (Nicomedes), 280– 210 לפנה"ס

מציירים קו ישר, a. בוחרים נקודה קבועה, A , שאינה על a.

קובעים קטע ישר, *d*. *B* היא נקודה שנעה על פני *a*.

את הנקודות *Y*,*X* בונים על הישר *AB*, כך ש- $d = BY = XB$





'מישוריות' - באמצעות קו ישר ומעגל

'גופיות' - באמצעות חתכי חרוט

'קוויות' – באמצעות קווים מורכבים יותר

… The following sort of things somehow appears to be no small error to geometers: whenever a planar problem is found by someone via conic or linear [lines], and on the whole whenever [some problem] is solved from a class other then its own, for instance, the problem on the parabola in the fifth book of Apollonuis *Conics* and the solid *neusis* towards a circle assumed by Archimedes in the book *On the Spirals;* for by using no solid one is able to find the theorem proved by him.

Willbur Knorr, *Ancient Tradition of Geometric Problems*

This classification scheme of course not original to Pappus. He himself ascribes it to "the ancients", while his designation of the problem of the cube duplication as "solid" is confirmed much earlier by Hero. …

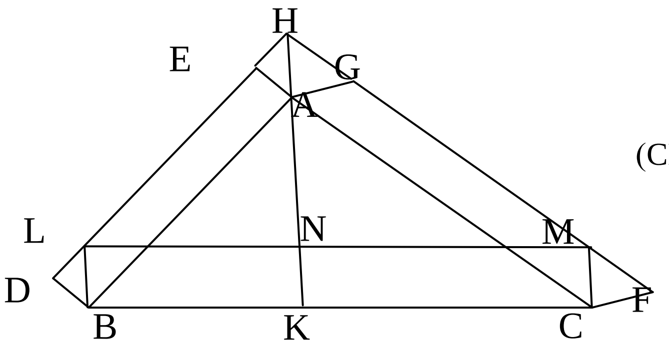
With Pappus, however, the distinction obtains a normative aspect. … This rather timid pronouncement is the only ancient statement I know of which articulates the formal requirement to seek planar construction in preference to others. Yet it is almost invariably presented in modern accounts as the principal objective of problem solving throughout the ancient tradition. Is there evidence evidence that the ancients ever actually subscribed to this rule? Pappus' remark indicates at once that neither Archimedes nor Apollonius felt bound by it, for their own constructions are singled out for criticism. One can safely assume that the suitable alternative constructions could have been produced, had either geometer admitted the need.

…

There is a much deeper difficulty, however: in the context of the Greek geometry the formal rule proposed by Pappus and the classification scheme corresponding to it are unworkable. If one can produce a planar construction for a problem, that does indeed establish the planar character of the problem. But the discovery of a solid construction for a problem does not yet suffice for securing the solid classification of this problem; one must go on to demonstrate that no planar construction is possible. Although comparable impossibility proofs were an essential feature of the ancient theory of irrational lines, we have no grounds for supposing that the Greek geometers ever did or could set forth the kinds of proofs required for the classification of problems. … Despite this, Pappus and Hero seem perfectly comfortable in asserting the solid nature of the problems of cube duplication and angle trisection and the linear nature of the problem of generalized angle division, oblivious, it would appear, even to the realization that such a claim required a proof.

ספר IV - הכללת משפט פיתגורס

בהינתן משולש כלשהו ABC ושתי מקביליות כלשהן ACFG,BAED שבנויות על שתי צלעות ניתן לבנות בשיטות מישוריות מקבילית שלישית BCML, על הצלע השלישית אשר שטחה שווה לסכום השטחים של שתי המקביליות הנתונות



בניה: MC, LB מקבילים ל-HK

טענה: LMCB = BDEA + AGFC

הוכחה: 1. CMNK = CMHA, כי בסיסם זהה (CM) והם בנויים בין שני מקבילים HK,CM

2. CMHA = CFGA (סיבה דומה)

3. לכן CMNK = CFGA

כנ"ל BLNK = BDEA

QED!

ספר V - בעיית האיזופרימטריה

Bees, then, know just this fact which is useful to them, that the hexagon is greater than the square and the triangle and will hold more honey for the same expenditure of material in constructing each. But we, claiming a greater share in wisdom than the bees, will investigate a somewhat wider problem, namely that, of all equilateral and equiangular plane figures having an equal perimeter, that which has the greater number of angles is always the greater, and the greatest of then all is the circle having its perimeter equal to them.

ספר VII - אוצר האנליזה

The so-called Treasury of Analysis, my dear Hermodorus, is, in short, a special body of doctrine furnished for the use of those who, after going through the usual elements, wish to obtain power to solve problems set to then involving curves, and for this purpose only is it useful.

It is the work of three men, Euclid the writer of the Elements, Apollonius of Perga and Aristaeus the elder, and proceeds by the method of analysis and synthesis. ...

... in analysis we suppose that which is sought to be already done, and inquire what it is from which this comes about, and again what is the antecedent cause of the latter, and so on until, by retracing our steps, we light upon something already known or ranking as a first principle... But in synthesis, proceeding in the opposite way, we suppose to be already done that which was last reached in analysis, and arranging in their natural order as consequents what were formerly antecedents and linking them one with another, we finally arrive at the construction of what was sought...

Victor Katz - *A History of Mathematics*

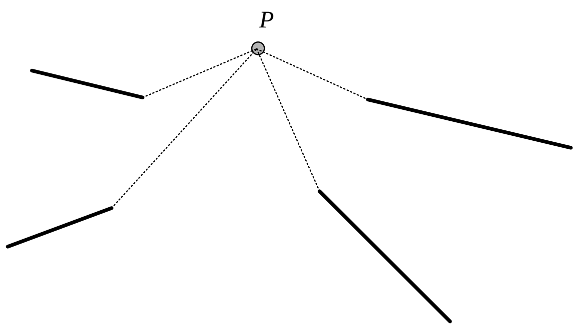
According to Pappus, the, to solve a problem or prove a theorem by analysis, begin by assuming what is required, then consider the consequences flowing from until a result is reached which is known to be true or "given". That is, begin by assuming that which is required, p, for example, and then prove that p implies q1, q_1 implies q_2, …, q_n implies q, where q is something known to be true. To give the formal synthetic proof of the theorem, or solve the problem, reverse the process beginning with q implies p_n. This method of reversal has always been controversial; after all, not all theorems have valid converses. In fact, however, most important theorems from Euclid and Apollonius do have at least partial converses. Thus the method does often provide the desired proof or solution, or at least demonstrates, when they are only partial converses, the conditions under which a problem can be solved.

ספר VII - בעיית המקומות הגיאומטריים

- סקירה של עבודות קודמות - על חלקן אין עדויות נוספות.
- בעיית ה"מקום" (Locus) של שלושה וארבעה ישרים (אפולוניוס, *קוניקה* III).
- בהינתן שלושה ישרים, למצוא את ה"מקום הגאומטרי" של כל הנקודות, כך שאם שלושה קווים ישרים נמתחים בזווית נתונה מכל נקודה אל שלושת הישרים הנתונים, אזי המלבן הבנוי על שניים מן הקווים הישרים שווה לריבוע הבנוי על הקו הישר השלישי.
- בהינתן ארבעה ישרים, למצוא את ה"מקום הגאומטרי" של כל הנקודות, כך שאם ארבעה קווים ישרים נמתחים בזווית נתונה מכל נקודה אל ארבעת הישרים הנתונים, אזי המלבן הבנוי על שניים מן הקווים הישרים שווה למלבן הבנוי על שני הקווים הישרים הנותרים.

דוגמה – מקום גאומטרי של ארבעה קווים:

אם מותחים קווים בזווית נתונה מנקודה אל ארבעה ישרים נתונים במקום, ואם יחס המלבן הבנוי על שניים מן הקווים למלבן הבנוי על שני הקווים הנותרים הוא יחס נתון, אזי הנקודה נשענת על חתך חרות נתון במקומו.



- המקום של חמישה-שישה ישרים; מטפל ביחסים בין קוביות הבנויות על שלושה ישרים (כלומר: יחסים בין נפחים).
- המקום של יותר משישה ישרים: "קובע עקומה". חידוש מהותי: עקומה נקבעת היטב על-ידי תנאים נתונים, גם אם היא אינה ניתנת לבנייה גאומטרית!
- מה המשמעות? "אין דבר שמוכל בתוך יותר משלושה ממדים."

It is true that some recent writers have agreed among themselves to use such “notions of more than three dimensions], but they have no clear ,.expressions [i.e meaning when they multiply the rectangle contained by these straight lines with the square on that or the rectangle contained by those. They might, however, have expressed such matters by means of the compositions of ratios, and I have given a general proof ...

- abcd:efgh חסר משמעות כאשר כל אות מייצגת קו ישר

הצעת פאפוס: להסתכל על - (a:e).(b:f).(c:g).(d:h) מה פירוש המכפלה?

פאפוס לא מפתח את הפרטים, אך רמז לכיוון של הסתכלות על יחס כעל מספר בפני עצמו.

הוא מוכיח:

The ratio of [areas] completely rotated is compounded from the ratios of the [areas] rotated and the ratios of the lengths of lines from the centers of gravity similarly drawn to the axes of rotation

משפט פאפוס-גולדין (H.P. Guldin 1577-1643)

נפחו של גוף סיבובי שווה למכפלת השטח המסתובב והמרחק שעובר מרכז הכובד שלו (כלומר: 2πכפול המרחק ממרכז הכובד לציר הסיבוב).

הוכחת פאפוס: לא ידועה!

415 ל"ס: מותה של היפתיה

455ל"ס: בזיזת רומי

פרוקלוס (Proclus 410-485)

בואציוס (Boetius 480-524)

סימפליקיוס (Simplicius @520)

איזידורוס ממילטוס (@520) - ראש האקדמיה האחרון

529 ל"ס: יוסטיניאנוס סוגר את האקדמיה באתונה - אנשי האקדמיה בורחים לפרס

529 ל"ס: ייסוד המנזר הראשון במונטה קאסינו